

2. Методы классической современной теории автоматического управления. Т.1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / К.А. Пулков, Н.Д. Егулов, А.И. Баркин [и др.]; под ред. К.А. Пулкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 641 с.
3. Методы классической современной теории автоматического управления. Т.2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. / К.А. Пулков, Н.Д. Егулов, А.И. Баркин [и др.]; под ред. К.А. Пулкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 638 с.
4. Хальмийн Р. Математическое моделирование при разработке компенсатора реактивной мощности // Вест. КрасГАУ. – Красноярск, 2010. – №12. – С. 139–143.



УДК 621.327

Л.В. Куликова, А.И. Тищенко, Г.И. Цугленок

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ СРЕДЫ ПРИ ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РАСТИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрены энергетические взаимодействия поляризованной среды при электротехнологической обработке растительных материалов, выполнен анализ воздействующих энергетических факторов, построена математическая модель, позволяющая оценить энергетические соотношения в поляризованной среде.

Ключевые слова: растительные материалы, электротехнологическая обработка, поляризация, энергетические взаимодействия.

L.V. Kulikova, A.I. Tishchenko, G.I. Tsuglenok

POLARIZED ENVIRONMENT ENERGY INTERACTION IN THE PROCESS OF THE VEGETABLE MATTER ELECTRICAL AND TECHNOLOGICAL PROCESSING

Polarized environment energy interactions in the process of the vegetative matter electrical and technological processing are considered; the affecting energy factor analysis is conducted; the mathematical model which allows to estimate energy balance in the polarized environment is constructed.

Keywords: vegetative matter, electrical and technological process

Известно, что при электротехнологической обработке растительных материалов с целью изменения их свойств наблюдаются сложные электрофизические, электрохимические и биологические процессы [1]. Определить влияние каждого процесса в такой системе довольно сложно, однако выявить основные факторы, способствующие раскрытию механизма воздействия электромагнитного поля на объект обработки, и учесть важнейшие физические закономерности, определяющие состояние исследуемой системы, представляется возможным посредством анализа энергетических соотношений поляризованной среды. Для описания электрофизических свойств поляризованной среды важны энергетические соотношения, которые позволяют не только определить состояние исследуемой среды, но и определить оптимальный метод описания этого состояния. Под оптимальностью метода понимается возможность учета важнейших физических закономерностей, приводящих к упорядочению, и математическая формализуемость таких закономерностей, логически завершаемая применением современных вычислительных методов и средств.

Устойчивое распределение диполей в рассматриваемом объеме исследуемой среды определяется условием минимума суммы энергии:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

где W_1 – электростатическая энергия;

W_2 – энергия обменного взаимодействия диполей;
 W_3 – энергия анизотропии (поляризации);
 W_4 – энергия поляризуемости вещества.

Энергия поляризуемости вещества может быть учтена введением объемных интегралов от некоторых функций поляризуемости и упругих напряжений. Задача расчета распределения тензоров упругих напряжений является очень сложной и специфической проблемой физики твердого тела, а с учетом того, что распределение этих тензоров упругих напряжений не оказывает существенного влияния при изучении рассматриваемых процессов, следовательно, этой составляющей можно пренебречь.

Введем понятие объемной плотности энергии $W_v = \frac{dW}{dV}$. Тогда полная энергия, сосредоточенная в некотором объеме V , равна $\int W_v dV$. Для моделирования свойств анизотропной среды, в которой наблюдается явление поляризации, в качестве области V необходимо выделить характерный объем, содержащий все основные особенности структуры исследуемого материала. В дальнейшем для краткости объем V будем называть расчетной областью. Для теоретического описания расчетной области представим распределение диполей макроскопическим полем единичного вектора $\bar{\alpha}$ коллинеарного с вектором поляризации \bar{P} . В любой точке расчетной области V можно записать: $|\bar{P}| = P$, где P – поляризация, поэтому $\bar{\alpha} = \frac{\bar{P}}{P}$.

Распределение вектора можно аппроксимировать методом конечных элементов. В этом случае для узлового распределения $\bar{\alpha}$ необходимо минимизировать энергетический функционал, соответствующий полной энергии:

$$G = G_1 + G_2 + G_3. \quad (1)$$

Узловое распределение $\bar{\alpha}$ определяется локальным минимумом энергетического функционала. Выбор локального минимума определяется свойствами исследуемого материала. С учетом изложенного рассмотрим способы построения и вычисления составляющих энергетического функционала (1), соответствующих электростатической энергии G_1 , обменной энергии G_2 , и энергии анизотропии G_3 .

Объемная плотность электростатической энергии определяется как

$$w = -\bar{P}\bar{E} = -P\bar{\alpha}\bar{E}, \quad (2)$$

где \bar{E} – вектор напряженности электрического поля в рассматриваемой точке.

Конечно-элементная аппроксимация вектора $\bar{\alpha}$ имеет вид:

$\bar{\alpha} = \mathbf{N}_- \cdot \mathbf{f}_-^{\bar{\alpha}} = \mathbf{f}_-^{\bar{\alpha}T} \cdot \mathbf{N}_-^T$, где \mathbf{N}_- – матрица-строка функции формы, $\mathbf{f}_-^{\bar{\alpha}}$ – матрица-столбец узлового распределения вектора $\bar{\alpha}$.

В зависимости от поставленной цели вектор \bar{E} в формуле (2) может быть представлен двумя способами:

а) при исследовании электрофизических свойств вещества используется континуальная модель этих свойств материала (каждая точка исследуемого макрообъема обладает свойствами всего материала, следовательно, объем V можно считать представителем точки расчетного объема), в этом случае можно записать $\bar{E} = const$ и тогда – $w = -P \mathbf{f}_-^{\bar{\alpha}T} \cdot \bar{E} \cdot \mathbf{N}_-^T$,

б) при исследовании электрофизических свойств и оболочек клеток, что особенно важно для электротехнологии различных процессов, напряженность электрического поля представим в виде двух слагаемых

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \mathbf{N}_- \cdot \mathbf{f}_-^{\bar{E}_1} + \bar{E}_2,$$

где \bar{E}_1 – непрерывная (континуальная) составляющая распределения; \bar{E}_2 – кусочно-постоянная (в пределах конечного элемента) составляющая, и тогда объемную плотность энергии можно определить как

$$w = -P \left[\bar{\chi}^{\circ T} \cdot \bar{E}_2 \cdot \mathbf{N}_-^T - P \left[\bar{\chi}^{\circ T} \cdot \mathbf{N}_-^T \cdot \mathbf{N}_- \cdot \bar{E}_1 \right] \right]$$

В этом случае на каждом шаге минимизации функционала значения напряженности могут быть вычислены с помощью пространственных интегральных уравнений [2]. Электростатическая составляющая функционала определяется соотношением $G_1 = \int_V w dV$. Если энергия определяется в первом случае,

то

$$G_1 = -P \cdot \left[\bar{\chi}^{\circ T} \int_V \bar{E} \cdot \mathbf{N}_-^T dV \right]. \quad (3)$$

Производную функционала по матрице $\left[\bar{\chi}^{\circ T} \right]$ будем называть гамильтонианом и обозначим через $\underline{\nabla} G_1$. Гамильтониан функционала электростатической энергии, представленного в форме (3), можно записать в следующем виде:

$$\underline{\nabla} G_1 = -P \int_V \bar{E} \cdot \mathbf{N}_-^T dV. \quad (4)$$

Как видно из полученной формулы, гамильтониан представляет собой матрицу-столбец, каждым членом которой является вектор. Производную гамильтониана $\underline{\nabla} G_1$ по матрице $\left[\bar{\chi}^{\circ T} \right]$ будем называть гессианом и обозначать через $\underline{\nabla} G_1^2$. Гессиан представляет собой обычную квадратичную матрицу. Гессиан функционала (4) равен нулю. Далее рассмотрим функционал обменной энергии. Для определения плотности обменной энергии можно использовать формулу

$$w_2 = k \left(\left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (5)$$

Эта формула справедлива для однородной структуры. Для реальной неоднородной структуры необходимо вместо коэффициента k использовать тензор \hat{k} , учитывающий неоднородные и анизотропные свойства. Тогда формула (5) с учетом соотношения $\bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right)^2$ принимает вид

$$w_2 = -\bar{\alpha} \nabla \hat{k} \nabla \bar{\alpha}.$$

При конечно-элементной аппроксимации распределения $\bar{\alpha}$ последнюю формулу можно представить следующим образом:

$$w_2 = -\frac{1}{2} \nabla \hat{k} \nabla \bar{\alpha}^2 + \left[\bar{\chi}^{\circ T} \left(\text{grad } \mathbf{N}_-^T \hat{k} \cdot \text{grad } \mathbf{N}_-^T \right) \right] \bar{\chi}^{\circ}$$

Первое слагаемое в этой формуле равно нулю, так как $\bar{\alpha}^2 = 1$ в любой точке расчетной области. С учетом вышесказанного функционал обменной энергии, гамильтониан и гессиан запишем в следующем виде:

$$G_2 = \left[\bar{\chi}^{\circ T} \int_V \text{grad } \mathbf{N}_-^T \hat{k} \cdot \text{grad } \mathbf{N}_-^T \cdot dV \right] \bar{\chi}^{\circ}$$

$$\underline{\nabla} G_2 = 2 \int_V \text{grad } \mathbf{N}_-^T \hat{k} \cdot \text{grad } \mathbf{N}_-^T dV \cdot \left[\bar{\chi}^{\circ} \right]$$

$$\underline{\nabla}^2 G_2 = 2 \int_V \text{grad } \mathbf{N}^T \hat{k} \cdot \text{grad } \mathbf{N}^T dV.$$

При одноосной анизотропии объемную плотность энергии можно представить в виде ряда по четным степеням $\sin \theta$:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} k_{ui} \langle \sin^2 \theta \rangle^i,$$

где k_{ui} – константы одноосной анизотропии; θ – угол между вектором $\bar{\alpha}$ и единичным вектором \bar{g} , направленным вдоль оси наибольшей анизотропии, соответствующей экстремуму объемной плотности энергии.

Если в полученную формулу подставить $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ и исключить члены, не зависящие от θ , то получим следующее выражение:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cos^2 \theta \rangle^n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i!}{n! (-n)!} K_{ui} = \sum_{n=1}^{\infty} K_{gn} \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n},$$

где $K_{gn} = \langle 1 \rangle^n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i!}{n! (-n)!} k_{ui}$ – приведенные константы одноосной анизотропии. Используя

конечно-элементную аппроксимацию распределения $\bar{\alpha}$ и полученное выше выражение, можно записать формулу для определения функционала одноосной анизотропии в случае кусочно-постоянного распределения вектора \bar{g} и в пределах конечных элементов:

$$G_3 = \int_V \sum_{n=1}^{\infty} K_{gn} \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \bar{g} \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n} dV = \int_V \sum_{n=1}^{\infty} K_{gn} W_0^n dV,$$

где $W_0 = \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{g} \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n}$

Гамильтониан и гессиан функционала можно записать в следующем виде:

$$\underline{\nabla} G_3 = \int_V \sum_{n=1}^{\infty} n K_{gn} W_0^{n-1} \underline{\nabla} W_0 dV,$$

$$\underline{\nabla}^2 G_3 = \int_V \sum_{n=1}^{\infty} n K_{gn} \langle -1 \rangle W_0^{n-2} \langle \underline{\nabla} W_0 \rangle \langle \underline{\nabla} W_0 \rangle^T + W_0^{n-1} \underline{\nabla}^2 W_0 dV,$$

где $\underline{\nabla} W_0 = 2 \bar{g} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \bar{g} \cdot \langle \bar{g} \bar{\alpha} \rangle^{2n-2} \underline{\nabla}^2 W_0 = 2 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{g}$

Далее рассмотрим минимизацию энергетического функционала. Для отыскания узлового распределения вектора $\bar{\alpha}$, соответствующего текущему состоянию исследуемого вещества, необходимо решить задачу локального минимума функционала (1), ближайшего к начальному приближению $\bar{\alpha}_0$. Матрица $\bar{\alpha}_0$ несет в себе информацию об электрофизических свойствах исследуемого материала. Для решения этой задачи воспользуемся итерационным процессом по методу Ньютона:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = \bar{\alpha}_k - \langle \underline{\nabla}^2 G \rangle^{-1} \underline{\nabla} G, \tag{6}$$

где $\bar{\alpha}_k$ – узловое распределение вектора $\bar{\alpha}$ на k -м итерационном шаге; $\underline{\nabla} G$ – гамильтониан, вычисляемый путем суммирования составляющих, определенных выше; $\underline{\nabla}^2 G$ – гессиан, вычисляемый путем суммирования определенных выше составляющих. Достоинством итерационного алгоритма является то, что если $\bar{\alpha}_0$ достаточно близко к локальному минимуму $\bar{\alpha}_*$ функционала G с невырожденной матрицей $\underline{\nabla}^2 G \langle \bar{\alpha}_* \rangle$ и поэтому положительно определенной, то последовательность $[\bar{\alpha}^y]_k$,

генерируемая алгоритмом, будет сходиться q -квадратично к \mathbf{x}^* . Существенные недостатки этого алгоритма заключаются в том, что метод Ньютона не сходится глобально и требует решения линейных уравнений (в формулу (6) входит матрица, обратная гессиану). В связи с этим можно предложить следующую модификацию алгоритма:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \nabla^2 G + \xi \mathbf{I} \nabla G, \quad (7)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица; $\xi \geq 0$ – такое число, что независимо от знакоопределенности $\nabla^2 G$, матрица $\nabla^2 G + \xi \mathbf{I}$ положительно определена.

Для решения задачи минимизации энергетического функционала с вычислительной точки зрения можно использовать обычные методы спуска:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \xi^{-1} \nabla G, \quad (8)$$

где ξ – скалярная величина, равная второй производной функционала G по направлению ∇G , взятой по абсолютной величине

$$\xi = \left| \frac{\nabla G \cdot \nabla^2 G \cdot \nabla G}{\nabla G \cdot \nabla G} \right|. \quad (9)$$

Этот алгоритм позволяет накапливать значения по элементам ∇G и $\nabla G \cdot \nabla^2 G \cdot \nabla G$ и выполнять анализ воздействующих энергетических соотношений.

Таким образом, полученные энергетические соотношения электрофизических свойств поляризованной среды позволяют выявить особенности поляризованного состояния множества внутренних и граничных точек исследуемого материала. Решение задачи минимизации энергетического функционала дает возможность построить характеристики, позволяющие получать материалы с заранее заданными свойствами в зависимости от вида растительного сырья и поставленной цели электротехнологической обработки.

Литература

1. Багаев А.А., Багаев А.И., Куликова Л.В. Электротехнология: учеб. пособ. – Барнаул: Изд-во АГАУ, 2006. – 320 с.
2. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа // Оптимизация и исследование операций. – Вып. 22. – М.: Наука, 1989. – С. 23–34.

