МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 539.3

А.Д. Матвеев

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УСЛОВИЙ ПРОЧНОСТИ*

Изложен метод построения приближенных решений стохастической задачи упругости. Показано, что конечноэлементная постановка стохастической задачи упругости сводится к конечному множеству детерминистических дискретных задач упругости. Доказано, что для конструкции со случайными параметрами существует бесконечное множество эквивалентных условий прочности. Предложен детерминистический подход нахождения коэффициентов запаса и срока службы для конструкций со случайными параметрами, которые состоят из пластичных материалов. Кратко рассмотрена процедура оптимального проектирования конструкций, обладающих максимально возможной прочностью.

Ключевые слова: *обобщенное эквивалентное напряжение, упругие тела, стохастическая задача упругости, коэффициент запаса, эквивалентные условия прочности.*

A.D. Matveev

ANALYSIS OF THE ELASTIC STRUCTURES STRENGTH WITH STOCHASTIC PARAMETERS USING EQUIVALENT STRENGTH CONDITIONS

The method of constructing approximate solutions for the elasticity stochastic problem is represented in the article. It is shown that the finite element formulation of the elasticity stochastic problem is reduced to a finite set of deterministic discrete problems of elasticity. It is proved that there are infinitely many equivalent strength conditions for random parameters structure. Deterministic approach to find the coefficients of safety factor and operating time for the plastic structures of random mechanical properties is proposed. The procedure of optimal designing the structures having maximum strength properties is shortly considered.

Key words*: generalized equivalent tension, elastic bodies, elasticity stochastic problem, reserve coefficient, equivalent strength condition.*

Введение. Как известно, успех расчета зависит от выбора расчетной схемы, которая должна максимально отвечать реальной работе конструкции. В основе классической расчетной схемы упругих конструкций лежит гипотеза полной определенности, которая состоит в детерминированности нагрузки, механических свойств материалов, размеров и форм конструкций, т.е. нагрузки, модули упругости, геометрические размеры конструкций принимают определенные значения. Однако при детерминистическом подходе расчетная схема не всегда удовлетворительно описывает реальную работу конструкции, так как нагрузка и механические свойства материала конструкции носят случайный характер [1–6]. Реальный металл характеризуется микронеоднородностью, которая обусловлена анизотропией кристаллитов, из которых он состоит, наличием между ними пор и неметаллических включений [1]. Поэтому результаты испытаний конструкций на прочность (долговечность) имеют значительный статистический разброс, причем явления повреждения и разрушения конструкций обнаруживают вероятностную природу. Это стало причиной развития статистических теорий прочности и разрушения упругих тел [1–6], в основе которых лежат теория вероятностей и математическая статистика [7]. Статистическая теория прочности Н. Афанасьева [1] удовлетворительно описывает влияние конструктивных факторов на средние значения пределов выносливости деталей машин. Теория “слабого звена” В. Вейбулла описывает влияние размеров образцов и неоднородности распределения напряжений на характеристики сопротивления хрупкому разрушению.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053).

Результатом расчета конструкции на прочность должно быть решение вопроса о том, сможет ли данная конструкция надежно выполнять свои функции в течение заданного срока службы (времени эксплуатации) [8]. Таким образом, на заключительном этапе расчета на прочность неизбежно приходится решать вопросы надежности конструкции. Под надежностью понимают способность конструкции выполнять возложенные на нее функции в течение заданного промежутка времени эксплуатации без отказов [8] (т. е. без нарушения работы конструкции). Поскольку все внешние (нагрузка, условия эксплуатации) и внутренние (механические свойства материала) параметры конструкции носят случайный характер [1–6], то отказ трактуется как некоторое случайное событие, а надежность – как вероятностная характеристика конструкции. Наиболее удобной мерой надежности является вероятность P того, что в течение заданного промежутка времени при определенных условиях эксплуатации не произойдет ни одного отказа в работе конструкции. Эту вероятность P называют надежностью конструкции [8]. Понятие надежности конструкции тесно связано с понятием долговечности, т. е. со временем T работы конструкции от начала эксплуатации до полного выхода ее из строя (до предельного состояния конструкции [8]). Значит, надежность P есть функция времени, т.е. имеем зависимость $P = P(t)$. В основе теории надежности лежат теории прочности и разрушения конструкций, которые обладают следующими недостатками [4]. Во-первых, целью расчета (на этапе эскизного проектирования) является такой выбор конструкции, разрушение которой было бы маловероятным событием, т. е. разрушение конструкций не может быть массовым событием, и поэтому статистическое истолкование вероятности утрачивает для него смысл. Во-вторых, в статистических подходах используют приближенные известные простые законы распределения случайных величин (событий) [1–6]. Построение точных законов распределения связано с большими трудностями, так как для их построения требуется выполнить большое количество сложных испытаний для большой партии однотипных конструкций. Итак, на этапе эскизного проектирования большая часть исходной информации о конструкции носит статистический или неполный характер (часть внутренних и внешних параметров конструкции, по сути, являются случайными величинами). Возникает вопрос о том, как в расчетах согласовать между собой параметры, которые распределены по вероятностным законам и детерминистически заданы (т. е. принимают определенные значения). В теории вероятности используются числовые характеристики [7]. Основной числовой характеристикой случайной величины является математическое ожидание (т. е. среднее значение случайной величины), которое больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений [7]. Однако применение в расчетах средних значений нагрузок, модулей упругости и напряжений [6] порождает трудности, возникающие при оценке прочности конструкций. Время T эксплуатации (наработки) конструкции до первого отказа есть случайная величина [8]. Среднюю наработку T_c конструкции до первого отказа, согласно ГОСТ 27.002-89 [8], находят по формуле $T_c = \int_0^{\infty} tf(t)dt$, где $f(t)$ – плотность распределения наработки. Имеем $T_{\min} < T_c < T_{\max}$, где $T_{\min}$ ($T_{\max}$) – минимальное (максимальное) возможное время эксплуатации конструкции. Найти значения $T_{\min}$, $T_{\max}$ трудно. Для практики важно знать значения $T_{\min}$, $T_{\max}$. Как известно, для разрушения хрупкого тела достаточно, чтобы в одной точке тела (в слабом звене расчетной схемы конструкции) возникло напряжение, равное предельному. Значит, между максимальным напряжением, возникающим в хрупком теле, и вероятностью его разрушения существует взаимно однозначная связь, что и подтверждают статистическая теория (т. е. теория “слабого звена”) хрупкого разрушения и эксперименты [3]. Отметим, что разрушение пластичного тела происходит только тогда, когда в теле возникает область пластического состояния определенных размеров [9]. Установить взаимно однозначную связь между размерами этой области и вероятностью разрушения очень сложно. Таким образом, условия разрушения хрупкого тела затруднительно использовать для анализа разрушения пластичных материалов.

В данной работе изложены некоторые подходы нахождения коэффициентов запаса прочности и времени эксплуатации для упругих конструкций, состоящих из пластичных материалов. Предполагается, что механические характеристики и нагружения данных конструкций есть случайные функции.

1. Численный стохастический анализ прочности упругих конструкций. Для линейно упругой конструкции, которая состоит из пластичного материала (металла) и занимает область V с гладкой границей S, постановку стохастической краевой стационарной задачи теории упругости (в перемещениях) в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ представим в следующем виде [6]:

$$-\partial(a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u))/\partial x_j = F_i \text{ в } V \in R^3, \quad (1)$$

на S_q: $a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)n_j = q_i$, на S_u: $u = 0$, $S = S_u + S_q$,

где ε_{kh} – деформации; u – вектор перемещений конструкции V; n_j – компоненты внешней нормали к поверхности S_q; a_{ijkh} – модули упругости конструкции V, $a_{ijkh} \geq 0$; F_i – объемные и q_i – поверхностные силы; a_{ijkh}, F_i, q_i – стационарные случайные гладкие функции координат; $i, j, k, h = 1,2,3$.

Будем считать, что геометрические параметры конструкции V заданы, т. е. принимают определенные значения. Пусть известны такие детерминистические гладкие стационарные функции координат F_i^1, F_i^2 q_i^1, q_i^2, a_{ijkh}^1, a_{ijkh}^2, что

$$\text{в } V: F_i^1 \leq F_i \leq F_i^2,\ 0 \leq a_{ijkh}^1 \leq a_{ijkh} \leq a_{ijkh}^2,\ \text{на } S_q: q_i^1 \leq q_i \leq q_i^2. \quad (2)$$

Испытания показывают [4], что значения той или иной механической характеристики пластичного однородного материала (металла) лежат в некотором интервале и что для изотропных однородных пластичных металлов значения коэффициента Пуассона μ меняются незначительно. Так как микроструктура металлов неоднородна [1], то реальные металлы, по сути, являются изотропными неоднородными телами. Значит, для реальной металлоконструкции, состоящей из изотропного материала, можно считать, что модуль Юнга E представляется некоторой функцией координат, т. е. имеем $E = E(x, y, z)$. Заметим, что определить вид функции $E(x, y, z)$ с помощью экспериментов сложно. Однако, как показывает опыт, функция $E(x, y, z)$ ограничена сверху и снизу, т. е. существуют постоянные $E_1, E_2 > 0$, такие, что

$$E_1 \leq E(x, y, z) \leq E_2. \quad (3)$$

Значения чисел E_1, E_2 определяются с помощью экспериментов [4]. Итак, можно считать, что функция модуля Юнга $E(x, y, z)$ есть случайная функция координат.

Рассмотрим численную процедуру нахождения коэффициента запаса прочности для конструкции V, которая состоит из изотропного пластичного материала (металла). Считаем, что модуль Юнга E конструкции есть случайная гладкая функция координат, которая удовлетворяет условиям (3), причем $E(x, y, z) \neq const$ во всей области конструкции, числа E_1, E_2 известны. Считаем, что значение коэффициента Пуассона μ для конструкции V задано, $\mu = const$. При таких предположениях стохастическая задача упругости (1) имеет бесконечное множество решений, которые отвечают решениям задачи (1) для различных случайных функций E, F_i, q_i, удовлетворяющих условиям (2), (3), причем в V $E \neq const$. Используем конечноэлементную постановку для задачи (1). Область конструкции представляется мелким регулярным разбиением на конечные элементы (КЭ): $V_1,...,V_N$; $V = \bigcup_{e=1}^{N} V_e$. Обозначим: E^e – модуль Юнга, F_i^e – объемные и q_i^e – поверхностные силы КЭ V_e; где E^e, F_i^e, q_i^e – случайные функции, $i = 1,2,3$; $e = 1,...,N$, N – общее число КЭ дискретной модели конструкции V. В силу (2) существуют постоянные $F_i^{(e)1}, F_i^{(e)2}, q_i^{(e)1}, q_i^{(e)2}$ (число e фиксировано), что

$$q_i^{(e)1} \leq q_i^e \leq q_i^{(e)2},\ \ F_i^{(e)1} \leq F_i^e \leq F_i^{(e)2}. \quad (4)$$

Не теряя общности суждений, для простоты изложения будем считать, что в (2) $F_i^1, F_i^2 \geq 0$ в области V, на поверхности S_q: $q_i^1, q_i^2 \geq 0$. В силу малых размеров КЭ будем считать, что функции F_i^e, E^e (функция q_i^e) постоянны в V (постоянна на S_q), т. е. $F_i^e, q_i^e, E^e = const$ на КЭ V_e. Считаем, что случайная величина E^e (значение модуля Юнга E^e КЭ V_e) меняется дискретно с шагом ΔE^e, где $\Delta E^e = (E_2 - E_1)/m$; m – целое (задано), $m \geq 2$, $e = 1,\ldots,N$. Тогда модуль Юнга E^e КЭ V_e может принять одно из следующих значений:

$$E^e = E_1 \,,\; E^e = E_1 + \Delta E^e \,,\; E^e = E_1 + 2\Delta E^e \,, \ldots,\; E^e = E_1 + m\Delta E^e = E_2^e \,. \qquad (5)$$

Значит, случайная величина E^e может принять $m+1$ различных значений. Таким образом, для заданного разбиения $V_1,\ldots,V_N$ конструкции V имеем $M = (m+1)^N$ различных вариантов распределения модулей Юнга по КЭ, где N, m – целые, заданы. При расчете конструкции на прочность для всех КЭ используем максимальные (по модулю) значения нагружений. Учитывая (2), (4) и что $F_i^1, F_i^2 \geq 0$, $F_i^1, F_i^2 \geq 0$, для КЭ V_e принимаем: $F_i^e = F_i^{(e)2}$; $q_i^e = q_i^{(e)2}$; $e = 1,\ldots,N$. Итак, для конструкции V получаем M детерминистических дискретных моделей $R_1,\ldots,R_M$, которые имеют различные распределения модулей Юнга по КЭ $V_1,\ldots,V_N$, но имеют одинаковые нагружения КЭ V_e: $F_i^e = F_i^{(e)2}$, $q_i^e = q_i^{(e)2}$, $e = 1,\ldots,N$. Поскольку $E \neq const$ в V, то любые две дискретные модели $R_i, R_j \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ имеют различные значения модулей Юнга E_i^e, E_j^e хотя бы в одном КЭ V_e ($e = 1,\ldots,N$) этих моделей ($E_i^e \neq E_j^e$). Пусть решению u_α, которое построено по методу конечных элементов (МКЭ) для модели R_α, отвечает коэффициент запаса прочности n_α, $\alpha = 1,\ldots,M$. Определив коэффициенты запаса $n_1,\ldots,n_M$, находим коэффициент запаса прочности n_p для конструкции V как минимальное значение из всех возможных, т. е. имеем $n_p = \min(n_1,\ldots,n_M)$, $1 \leq p \leq M$. Итак, для нахождения коэффициентов запаса $n_1,\ldots,n_M$ для дискретных моделей $R_1,\ldots,R_M$ необходимо решить по МКЭ $M = (m+1)^N$ многомерных задач упругости, что связано с большими временными затратами при больших значениях m, N; на практике $m = 10 \div 15$, $N \geq 10^4$. Такие многомерные дискретные задачи теории упругости можно эффективно решать на параллельных компьютерах. Пусть компьютер содержит N независимых процессоров. Если на каждом процессоре решить $k = m+1$ детерминистических дискретных задач упругости, то в этом случае время решения M дискретных задач упругости сокращается в N раз. Современные мощные параллельные компьютеры имеют более 10^4 процессоров. Таким образом, в настоящее время можно построить $M = (m+1)^N$ приближенных решений стохастической задачи упругости при $m = 10 \div 15$, $N \geq 10^4$, т. е. приближенно определить коэффициент запаса прочности n_p конструкции V со случайными параметрами. Отметим, что чем больше m, N, тем точнее находим значение коэффициента n_p.

2. Оптимальное проектирование упругих конструкций с максимально возможной прочностью. Практика показывает, что для конструкций, которые работают длительное время в тяжелых климатических условиях, наиболее важной характеристикой является их коэффициент запаса прочности. Кратко рассмотрим процедуру оптимального проектирования конструкций максимально возможной прочности. При этом считаем, что геометрические размеры и (статическое) нагружения данных конструкций принимают заданные значения. Рассмотрим в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ упругую конструкцию, которая имеет закрепление. Пусть конструкция состоит из изотропного пластичного материала (металла). Пусть функция Модуля Юнга E конструкции есть гладкая функция координат, т. е. $E = E(x,y,z)$. Причем $E_1 \leq E(x,y,z) \leq E_2$; $E(x,y,z) \neq const$ в V, где E_1, E_2 известны. Обозначим через G множество всевозможных гладких функций E, лежащих в заданном диапазоне. Предлагаемая процедура оптимизации сводится к построению для конструкции такой функции $E \in G$ модуля Юнга, которая обеспечивает (конструкции) максимально возможную прочность. Данную задачу оптимизации решаем приближенно, используя

МКЭ. Область конструкции представляем мелким регулярным разбиением на КЭ: $V_1,...,V_N$; $V=\bigcup_{e=1}^{N} V_e$; N – общее число КЭ. Обозначим: E^e – модуль Юнга; F_i^e – объемные и q_i^e поверхностные силы КЭ V_e; $i=1,2,3$; $e=1,...,N$. В силу мелкости разбиения, т. е. малых размеров КЭ V_e, принимаем $F_i^e, q_i^e, E^e = const$ на V_e. Проведя рассуждения, аналогичные п. 1, для конструкции V получаем M дискретных моделей $R_1,...,R_M$, имеющих различные распределения модулей Юнга по КЭ $V_1,...,V_N$, $M=(m+1)^N$, где целые числа N, m заданы. Модуль Юнга E^e КЭ V_e конструкции может принимать одно из значений (5). Для дискретной модели R_α конструкции решаем по МКЭ задачу теории упругости и находим коэффициент запаса прочности n_α, $\alpha=1,...,M$. Итак, решая по МКЭ M дискретных задач теории упругости, находим для конструкции максимально возможный коэффициент запаса прочности n_r, т. е. имеем $n_r=\max(n_1,...,n_M)$, $1\le r\le M$. Модуль Юнга КЭ V_e имеет значение E_r^e ($e=1,...,N$), которое соответствует дискретной модели $R_r\in\{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ конструкции. Итак, функцию модуля Юнга $E\in G$, которая обеспечивает максимально возможную прочность конструкции, приближенно представляем в областях КЭ $V_1,...,V_N$ постоянными функциями, принимающими соответственно значения $E_r^1,...,E_r^N$.

Отметим, что изготовить конструкцию, модуль Юнга которой в каждой точке области V равен значению заданной функции $E(x,y,z)$, очень сложно. Рассмотрим данную процедуру для проектирования конструкции максимально возможной прочности, которая включает N элементов $S_1,...,S_N$ (деталей, стержней и т. д.). Пусть каждый элемент S_e, $e=1,...,N$ состоит из изотропного однородного материала (металла). Пусть модуль Юнга E^e элемента S_e может принимать одно из значений: $E^e=E_1$, $E^e=E_2$, ..., $E^e=E_m$, где значения E_1, ..., E_m известны. Пусть $E_1>E_2>E_3>...>E_m$. В результате получаем $M=(m+1)^N$ конструкций $R_1,...,R_M$, которые отличаются различным распределением модулей Юнга по элементам $S_1,...,S_N$. Полагаем, что в любых двух конструкциях R_i, R_j, $1\le i, j\le M$, модули Юнга E_i^e, E_j^e хотя бы в одном элементе S_e этих конструкций различны (т. е. $E_i^e\ne E_j^e$). Для конструкций $R_1,...,R_M$ находим коэффициенты запаса $n_1,...,n_M$. Конструкция R_q, $1\le q\le M$, обладает максимально возможной прочностью, для которой коэффициент запаса прочности n_q равен $n_q=\max(n_1,...,n_M)$.

3. Эквивалентные условия прочности для упругих конструкций со случайными параметрами. Рассмотрим теорему об эквивалентных условиях прочности, которая интересна для практики.

Теорема. Пусть для конструкции, деформирование которой описывается уравнениями стохастической краевой задачи теории упругости (1), построены детерминистические конечноэлементные модели $\{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ (имеющие нагружения F_i^2, q_i^2), которым отвечают коэффициенты запаса $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^M$. Пусть коэффициент запаса $n_p=\min(n_1,...,n_M)$ конструкции V, $1\le p\le M$, удовлетворяет заданным условиям

$$n_a\le n_p\le n_b. \tag{6}$$

Тогда для любой дискретной модели $R_s\in\{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, $1\le s\le M$, существуют такие числа n_a^s, n_b^s, что если коэффициент запаса n_p конструкции V удовлетворяет условиям прочности (6), то коэффициент запаса n_s дискретной модели R_S удовлетворяет условиям

$$n_a^s\le n_s\le n_b^s. \tag{7}$$

И наоборот, если для коэффициента n_s выполняются неравенства $n_a^s \le n_s \le n_b^s$, то коэффициент запаса n_p конструкции V удовлетворяет заданным условиям прочности, т. е. имеем $n_a \le n_p \le n_b$. В этом случае будем говорить, что условия прочности (6), (7) эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим дискретную модель $R_s \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, $1 \le s \le M$, тела V (см. п. 1). Так как $R_s \in \{R_\alpha\}_{\alpha=1}^M$, то $n_s \in \{n_\alpha\}_{\alpha=1}^M$. В силу, что $n_p = \min(n_1,...,n_M)$, где $1 \le p \le M$, имеем $n_s \ge n_p$. Значит, существует число $\Delta n_s \ge 0$, где $\Delta n_s = n_s - n_p$. Пусть значение Δn_s известно. Тогда значения n_a^s, n_b^s находим по формулам

$$n_a^s = n_a + \Delta n_s, \quad n_b^s = n_b + \Delta n_s. \tag{8}$$

Пусть коэффициент запаса n_p конструкции V удовлетворяет заданным условиям (6). Тогда подставляя в (6) $n_p = n_s - \Delta n_s$ и учитывая (8), получаем неравенства (7). Пусть коэффициент запаса n_s модели R_s конструкции V удовлетворяет условиям (7). Тогда подставляя (8) в (7) и учитывая, что $\Delta n_s = n_s - n_p$, получаем неравенства (6). Итак, условия прочности (6), (7) эквивалентны. Теорема доказана.

Заметим, что при $M \to \infty$ получаем бесконечное множество эквивалентных условий прочности. С точки зрения практики эквивалентность условий прочности (7) условиям прочности (6) выражается в том, что если условия (5) выполняются для коэффициента запаса n_s, то коэффициент запаса n_p удовлетворяет заданным условиям (6), т. е. конструкция V обладает заданной прочностью.

Итак, для конечноэлементной модели конструкции V всегда существует конечное множество эквивалентных условий прочности $\{n_a + \Delta n_s \le n_s \le n_b + \Delta n_s\}_{s=1}^M$, где $\Delta n_s \ge 0$, каждое из которых получается путем смещения заданных условий (6) вправо на соответствующую величину Δn_s. В расчетах эффективно использовать условия прочности (7), так как в этом случае достаточно решить лишь только одну детерминистическую задачу упругости для дискретной модели R_s данной конструкции. Для выполнения условий прочности (6) необходимо решить большое число многомерных дискретных задач упругости для конструкции V (см. п. 1). Отметим, на этапе эскизного проектирования конструкции V величина Δn_s неизвестна, что и найти точное значение Δn_s трудно.

4. Детерминистический анализ прочности конструкций со случайными характеристиками. Рассмотрим детерминистический подход нахождения коэффициентов запаса прочности и времени эксплуатации (срока службы) до первого отказа для упругих конструкций, состоящих из пластичных материалов. В основе данного подхода лежит следующее предположение. Будем считать, что конструкция разрушается, если возникло пластическое состояние, хотя бы в одной точке ее области. В предлагаемом подходе задача упругости решается для заданных геометрических размеров конструкции. Влияние случайных параметров на прочностные свойства конструкции оцениваем количественно с помощью детерминистических величин и функций. В качестве таких величин используем коэффициент запаса прочности n, вероятность разрушения p конструкции, и зависимость вида $n = f(p)$, где f – гладкая детерминистическая функция. Считаем, что коэффициент n и время Δt эксплуатации конструкции связаны зависимостью $\Delta t = f_o(n)$, где f_o – гладкая детерминистическая функция, причем $f_o(0) = 0$, $n \in [n_a, n_b]$, n_a, n_b заданы. Тогда время Δt находим по формуле $\Delta t = f_o(f(p))$. Достоинства данного подхода состоят в следующем. Функция f_o определяется на отрезке $[n_a; n_в]$. Для малых значений $\delta = n_b - n_a$ (на практике [9], как правило, $\delta = 0{,}1 \div 0{,}5$) функцию $f_o(n)$ на отрезке $(n_a; n_в)$ можно приближенно представить линейной функцией. Вероятность p разрушения конструкции можно определить с помощью испытаний или задать, используя опыт работы подобных конструкций.

Для коэффициента запаса n и времени Δt эксплуатации конструкции можно найти верхние и нижние оценки, задавая различные значения для параметра p. В работе [11] изложен метод, в котором учитываются вероятностные факторы и характер распределения напряжений, влияющих на прочность конструкции. Кратко рассмотрим основные этапы реализации данного метода. Конструкция состоит из пластичного однородного материала, имеет статическое нагружение и q концентраторов напряжений. Пусть для конструкции построено конечноэлементное решение. В центре тяжести КЭ V_e по 4-й теории прочности определяем эквивалентное напряжение $\sigma_e^э$, $e=1,...,N$, N – общее количество КЭ. Считаем, что в области КЭ V_e: $\sigma_e^э = const$. Пусть в центрах непересекающихся областей $V^1,...,V^q$ конструкции расположены концентраторы напряжений, $V=\bigcup_{i=1}^{q} V^i$, V – область конструкции. Для области V^i конструкции находим максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_{m_i}^э = \max\limits_{e=1,...,N_i}(\sigma_e^э)$, где N_i – количество КЭ области V^i, $1 \le m_i \le N_i$, т. е. напряжение $\sigma_{m_i}^э$ возникает в КЭ $V_{m_i} \in V^i$ (КЭ V_{m_i} лежит в центре области V^i), $i=1,...,q$. Для области V^i обобщенное эквивалентное напряжение σ_0^i находим по формуле [11]

$$\sigma_0^i = \sigma_{m_i}^э \sqrt{1+\sum_{e=1,e\ne m_i}^{N_i} \alpha_e^2 \exp(-r_e^{m_i}/r_o)}\,, \tag{9}$$

где $\alpha_e = \sigma_e^э / \sigma_{m_i}^э$, $e=1,...,N_i$, $r_e^{m_i}$ – расстояние между центрами тяжести КЭ V_e и V_{m_i}, $1 \le m_i \le N_i$, $2r_o$ – диаметр КЭ V_{m_i}, $i=1,...,q$.

Пусть в КЭ V_m возникает максимальное эквивалентное напряжение $\sigma_m^э$ конструкции, т. е. $\sigma_m^э = \max(\sigma_1^э,...,\sigma_N^э)$. Тогда, как известно, коэффициент запаса прочности n_0 конструкции равен $n_0 = \sigma_т / \sigma_m^э$, где $\sigma_т$ – предел текучести материала. Вычисляем коэффициент запаса прочности n_i^k и вероятность разрушения p_i^k для области V^i [11]

$$n_i^k = \frac{\sigma_т}{\sigma_0^i}, \quad p_i^k = 1-\frac{n_i^k}{n_0}(1-p_0), \tag{10}$$

где $i=1,...,q$, p_0 – известно.

Пусть $p_i^k > 0$, $i=1,...,q$. Тогда вероятность p_r^k разрушения конструкции хотя бы в одной из областей $V^1,...,V^q$ равна $p_r^k = 1-\prod_{i=1}^{q}(1-p_i^k)$. Коэффициент запаса прочности n_r^k конструкции определяем по формуле [11]

$$n_r^k = n_0 \frac{\prod_{i=1}^{q}(1-p_i^k)}{1-p_0}. \tag{11}$$

Так как $f_o(0)=0$, функцию f_o приближенно представим $f_o(n)=\beta\, n$. Тогда имеем

$$t = \beta n\,, \tag{12}$$

где $\beta = const$, $\beta > 0$, значение β определяется с помощью испытаний; t – время работы конструкции (до первого отказа).

Используя (11), (12), находим время t_q^k эксплуатации конструкции V^q (имеющей коэффициент запаса прочности n_r^k) $t_r^k = \beta\, n_r^k$ или $t_r^k = \beta n_o (1 - p_q^k)/(1 - p_o)$.

Литература

1. *Афанасьев Н.Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – М.: Изд-во Акад. наук УкрССР, 1953.
2. *Волков С.Д.* Статистическая теория прочности. – М.: Машгиз, 1960.
3. *Вейбулл В.* Усталостные испытания и анализ их результатов. – М.: Машгиз, 1964.
4. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. – М.: Госстроиздат, 1965.
5. *Когаев В.П.* Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1993.
6. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970.
7. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2003.
8. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990.
9. *Москвичев В.В.* Основы конструкционной прочности технических систем и инженерных сооружений. – Новосибирск: Наука, 2002.
10. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Рациональное проектирование армированных конструкций. – Новосибирск: Наука, 2002.
11. *Матвеев А.Д.* Определение коэффициентов запаса прочности конструкций с учетом распределения напряжений // Вестн. КрасГАУ. – 2007. – №3. – С. 159–168.

УДК 631.331.62-66

Н.А. Богульская, И.О. Богульский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ С ГРАНУЛАМИ НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

В работе предложена математическая модель движения гранулированной среды. Гранулы представлены в виде ансамблей правильных абсолютно твердых тел с упругими оболочками, благодаря чему удается описать их взаимодействие и движение на достаточно большом временном промежутке.

***Ключевые слова**: математическое моделирование, гранулированная среда, оптимизация.*

N.A. Bogulskaya, I.O. Bogulskyi

MOTION MODELING INHOMOGENEOUS GRANULAR MEDIUM WITH GRANULES OF INCORRECT FORMS

The mathematical model of granular medium motion is presented in the article. Granules are represented as ensembles of regular absolutely rigid bodies with elastic membranes, making it possible to describe their interactions and movement at a sufficiently large time interval.

***Key words**: mathematical modeling, granular medium, optimization.*

Настоящая работа возникла в результате совместной деятельности авторов с инженерами-конструкторами, занимающимися созданием универсальных высевающих аппаратов вибрационного типа. Эти инженерные решения поддержаны рядом публикаций ([1], [2]) в научных изданиях, и подтверждены патентами на изобретение. Главным критерием оптимальности работы конструкции является равномерность высева семян из отверстий лотка высевающего устройства. Естественно, что модель, предложенная в работе, способна описать движение зерен в мельницах и многие другие процессы, связанные с движением гранулированных сред.