

На осциллограммах рисунка 6 (а, б) в разных масштабах показаны импульсы запуска стабилизатора (желтый луч в нижней части) и выходные импульсы управления ключом стабилизатора (зеленый луч в средней части) в случае, когда $U_{инт} = U_{мах}$, $U_{диф} = 0$. Из них видно, что максимально возможная длительность выходных импульсов составляет приблизительно 5,4 мкс.

Таким образом, на частоте 120 КГц максимальная длительность выходного импульса не превышает 65 % от периода и с увеличением частоты работы стабилизатора будет уменьшаться, что, в свою очередь, уменьшает диапазон изменения выходного тока, при котором наблюдается неизменное выходное напряжение.

Выводы. Проведенное исследование показало, что применение аппаратно-реализованного на FPGA быстродействующего процессорного ядра в сочетании с внешним быстродействующим высокоточным АЦП позволяет достичь частоты работы ИСН порядка 120 КГц при высоком качестве стабилизации выходного напряжения. При реализации УУ ИСН в виде цифрового автомата с жесткой логикой по предварительным оценкам частота работы ИСН может достигать $(0,6 \div 1)$ МГц и более.

Литература

1. Титовская Н.В., Титовский С.Н. Применение микроконтроллера АТхмега в устройстве управления импульсным стабилизатором напряжения // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 7. – С. 58–63.
2. Титовская Н.В., Титовский С.Н. Организация устройства управления импульсным стабилизатором напряжения на базе микроконтроллера // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 8. – С. 87–92.
3. Лукас В.А. Теория автоматического управления: учеб. для вузов. – М.: Недра, 1990.
4. Иванчура, В.И., Краснобаев Ю.В. Модульные быстродействующие стабилизаторы напряжения с ШИМ. – Красноярск: Изд-во КГТУ, 2006.
5. URL: http://www.altera.com/literature/hb/cyc2/cyc2_cii5v1.pdf.
6. URL: <http://datasheets.maxim-ic.com/en/ds/MAX1304-MAX1314.pdf>.
7. URL: <http://www.gaisler.com/products/griib/griib-gpl-1.1.0-b4108.zip>.



УДК 539.3

А.Д. Матвеев

РАСЧЕТ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН И БАЛОК С УЧЕТОМ ИХ СТРУКТУРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ СЛОЖНЫХ МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Как известно, базовые дискретные модели композитных пластин и балок, учитывающие их неоднородную (микронеоднородную) структуру, имеют очень высокую размерность. В данной работе показаны процедуры построения сложных многосеточных конечных элементов (МНКЭ) n -го типа формы прямоугольного параллелепипеда для расчета упругих композитных пластин и балок. При построении сложного МНКЭ n -го типа используются сложные МНКЭ $(n-1)$ -го типа, $n \geq 2$, а сложные МНКЭ 1-го типа проектируются с применением двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ). При построении ДвКЭ используются две вложенные узловые сетки, мелкая и крупная. Мелкая сетка порождена базовым разбиением ДвКЭ, которое учитывает его неоднородную (микронеоднородную) структуру. Крупная сетка используется для понижения размерности базового разбиения ДвКЭ. Предлагаемые сложные МНКЭ в композитных пластинах и балках описывают трехмерное напряженное состояние, учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру и образуют многосеточные дискретные модели малой размерности, причем сложные МНКЭ n -го типа порождают дискретные модели пластин, балок меньшей размерности, чем сложные МНКЭ $(n-1)$ -го типа. Напряжения определяются в любом компоненте композитных пластин и балок.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-0130).

Ключевые слова: упругость, композиты, пластины, балки, метод конечных элементов, сложные многосеточные конечные элементы.

A.D. Matveev

CALCULATION OF COMPOSITE PLATES AND BEAM TAKING INTO ACCOUNT THEIR STRUCTURE USING COMPLEX MULTIGRID FINITE ELEMENTS

The basic discrete model of composite beams and plates, taking into account their heterogeneity (micro-heterogeneous) structure are known to have a very high dimensionality. Constructing complex multigrid finite elements (MgFE) of cuboid n -type to calculate the elastic composite plates and beams is given. When constructing complex MgFE of n -type, complex MgFE of $(n-1)$ -type are used, and complex MgFE of type 1 are designed with double-grid finite elements (DgFE). When building DgFE, two nested grid nodes, both fine and large, are used. Fine grid is generated by base partition of DgFE taking into account its heterogeneity (microheterogeneous) structure. Large grid is used to reduce the dimension of the base partition of DgFE. The proposed complex MgFE in composite plates and beams describe a three-dimensional stress state, take into account the heterogeneous (micro-heterogeneous) multigrid structure and form the discrete model of small dimension. Moreover, the complex MgFE of n -type generate the discrete model of plates, beams of smaller dimension than do the complex MgFE of $(n-1)$ -type. Stresses are determined in any component of composite plates and beams.

Key words: elasticity, composites, plates, beams, finite element method, complex multigrid finite elements.

Введение. Расчет по методу конечных элементов (МКЭ) упругих трехмерных композитных пластин и балок с учетом их структуры сводится к построению базовых дискретных моделей высокого порядка [1, 2], что порождает проблемы при реализации МКЭ на ЭВМ. В работах [3, 4] разработаны многосеточные конечные элементы (МнКЭ), которые проектируются на основе базовых дискретных моделей и порождают многосеточные дискретные модели композитных пластин, балок малой размерности. Однако для пластин и балок с микронеоднородной структурой необходимо использовать достаточно мелкие базовые разбиения, что приводит к резкому увеличению размерности дискретных моделей, и в данном случае применение МнКЭ [3, 4] малоэффективно. В связи с этим в данной работе разработаны сложные МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, которые эффективнее известных МнКЭ, т. е. сложные МнКЭ порождают дискретные модели композитных пластин и балок меньшей размерности, чем МнКЭ [3, 4]. Сложные МнКЭ целесообразно разделить на определенные классы (типы). При построении сложных МнКЭ 1-го типа используем двухсеточные конечные элементы (ДвКЭ) формы прямоугольного параллелепипеда [3, 4]. В работе [5] построены и численно исследованы сложные МнКЭ 1-го типа. При построении сложных МнКЭ n -го типа ($n \geq 2$) используем сложные МнКЭ $(n-1)$ -го типа. Отметим, что сложные МнКЭ n -го типа порождают дискретные модели композитных пластин, балок меньшей размерности, чем сложные МнКЭ $(n-1)$ -го типа.

Цель исследования. В данной работе кратко показаны процедуры построения ДвКЭ, сложных МнКЭ 1-го типа и сложных МнКЭ 2-го типа формы прямоугольного параллелепипеда, которые имеют неоднородную структуру. Достоинства предлагаемых сложных МнКЭ состоят в следующем. Сложные МнКЭ:

- учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру трехмерных композитных пластин и балок;
- образуют многосеточные дискретные модели трехмерных композитных пластин и балок, число узловых неизвестных МКЭ которых на несколько порядков меньше числа узловых неизвестных базовых дискретных моделей;

– порождают решения с заданной погрешностью, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородной структуры пластин и балок.

Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей трехмерных композитных пластин и балок требует меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых дискретных моделей. Кроме того, в процедурах построения сложных МнКЭ используются алгоритмы МКЭ [1]. Поэтому эти процедуры удобно реализуются на ЭВМ.

Приведен пример расчета по МКЭ трехмерной балки волокнистой структуры с использованием сложных МнКЭ 1-го типа. Анализ результатов расчета показывает высокую эффективность применения сложных МнКЭ 1-го типа.

Объекты и методы исследования:

1. Процедура построения двухсеточных конечных элементов. Основные положения процедуры покажем на примере построения ДвКЭ V_i^a с неоднородной структурой формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ (рис. 1). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ V_i^a связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [6], т. е. во всей области ДвКЭ V_i^a реализуется трехмерное напряженное состояние. Область ДвКЭ V_i^a представляем базовым разбиением, состоящим из однородных односеточных КЭ V_j^h первого порядка формы куба со стороной h [1], $j = 1, \dots, M$; M – общее число КЭ V_j^h .

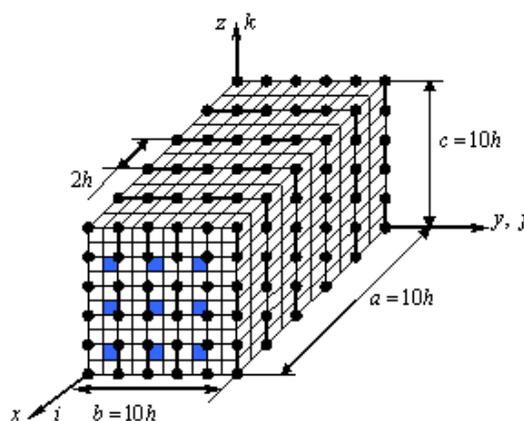


Рис. 1. Сетки ДвКЭ V_i^a

На рисунке 1 показано базовое разбиение ДвКЭ V_i^a на КЭ V_j^h . Базовое разбиение ДвКЭ V_i^a учитывает его неоднородную (микрон неоднородную) структуру и порождает мелкую узловую сетку V_i^h размерности $m_1 \times m_2 \times m_3$ с шагом h по осям Ox , Oy , Oz ; для рисунка 1 имеем $m_1 = m_2 = m_3 = 11$. ДвКЭ V_i^a армирован волокнами сечением $h \times h$, параллельными оси Ox . На рисунке 1 сечения волокон закрашены. На мелкой сетке V_i^h определяем крупную сетку V_i^H размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$ с шагами: H_1 по оси Ox , H_2 по оси Oy , H_3 по оси Oz , причем, $H_1 = k_1 h$, $H_2 = k_2 h$, $H_3 = k_3 h$, где k_1, k_2, k_3 – целые. На рисунке 1 узлы сетки V_i^H отмечены

точками; $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, $H_1 = H_2 = H_3 = 2h$, $n_1 = n_2 = n_3 = 6$. Полную потенциальную энергию Π_i^a базового разбиения ДвКЭ V_i^a представим в форме [1, 7]

$$\Pi_i^a = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \quad (1)$$

где $[K_j^h]$ – матрица жесткости; $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$ – векторы узловых сил и перемещений КЭ V_j^h базового разбиения ДвКЭ; T – транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [7] на крупной сетке V_i^H определяем функции перемещений u_a, v_a, w_a ДвКЭ V_i^a , которые запишем в форме

$$u_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk}, \quad (2)$$

где $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$ – значения функций перемещений u_a, v_a, w_a в узле i, j, k сетки V_i^H ; i, j, k – координаты целочисленной системы координат ijk , введенной для узлов крупной сетки V_i^H (см. рис. 1); $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$ – базисная функция узла i, j, k сетки V_i^H , $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, $k = 1, \dots, n_3$, $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$.

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^{n_1} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^{n_2} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^{n_3} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (3)$$

где x_i, y_j, z_k – координаты узла i, j, k сетки V_i^H в системе координат $Oxyz$ (см. рис. 1).

Введем обозначения: $N_\beta = N_{ijk}$, $u_\beta = u_{ijk}$, $v_\beta = v_{ijk}$, $w_\beta = w_{ijk}$, где $\beta = 1, \dots, n$; $n = n_1 n_2 n_3$. Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta u_\beta, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta v_\beta, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta w_\beta. \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{q}_i^a = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}^T$ есть вектор узловых перемещений крупной сетки V_i^H , т. е. вектор узловых перемещений ДвКЭ V_i^a . Используя (4), вектор

\mathbf{q}_j узловых перемещений КЭ V_j^h выражаем через вектор \mathbf{q}_i^a узловых перемещений ДвКЭ V_i^a . В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j^a] \mathbf{q}_i^a, \quad (5)$$

где $[A_j^a]$ – прямоугольная матрица, $j = 1, \dots, M$.

Подставляя (5) в выражение (1), из условия $\partial \Pi_i^a / \partial \mathbf{q}_i^a = 0$ получаем уравнение $[K_i^a] \mathbf{q}_i^a = \mathbf{F}_i^a$, где

$$[K_i^a] = \sum_{j=1}^M [A_j^a]^T [K_j^h] [A_j^a], \quad \mathbf{F}_i^a = \sum_{j=1}^M [A_j^a]^T \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

$[K_i^a], \mathbf{F}_i^a$ – матрица жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ V_i^a .

Замечание. Решение, построенное для крупной сетки V_i^H ДвКЭ V_i^a , с помощью формул (5) проецируем на мелкую сетку V_i^h базового разбиения ДвКЭ. В результате находим узловые перемещения мелкой сетки ДвКЭ V_i^a , что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ V_j^h базового разбиения ДвКЭ V_i^a и, следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры ДвКЭ V_i^a , т. е. пластины (балки).

2. Процедура построения сложных МНКЭ первого типа. Основные положения процедуры покажем на примере построения сложного МНКЭ V_e^b 1-го типа с неоднородной структурой формы прямоугольного параллелепипеда (рис. 2). Область МНКЭ V_e^b представляем ДвКЭ V_i^a , $i = 1, \dots, M_a$, M_a – общее число ДвКЭ V_i^a . При этом ДвКЭ V_i^a имеют одинаковые геометрические размеры, неоднородную структуру, мелкие V_i^h и крупные V_i^H сетки. На рисунке 2 сложный МНКЭ V_e^b 1-го типа (размерами $20h \times 20h \times 20h$) состоит из восьми ДвКЭ V_i^h (которые имеют размеры $10h \times 10h \times 10h$). Границы ДвКЭ V_i^h на рисунке 2 отмечены пунктирными линиями, $M_a = 8$. Базовые разбиения ДвКЭ V_i^a учитывают неоднородную структуру сложного МНКЭ V_e^b . Крупные сетки V_i^H ДвКЭ V_i^a ($i = 1, \dots, M_a$) образуют сетку H_a , на которой определяем крупную сетку V_H^b (размерности $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$) сложного МНКЭ V_e^b 1-го типа (сетка V_H^b вложена в сетку H_a). На рисунке 2 узлы сетки V_H^b отмечены точками, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 6$. Функции перемещений u_b, v_b, w_b , построенные на крупной сетке V_H^b с помощью полиномов Лагранжа [7], представим в виде

$$u_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^u, \quad v_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^v, \quad w_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^w, \quad (7)$$

где N_{β}^b – базисная функция β -го узла крупной сетки V_H^b ; $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w$ – значения соответственно функций перемещений u_b, v_b, w_b в β -м узле сетки V_H^b ; $m = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

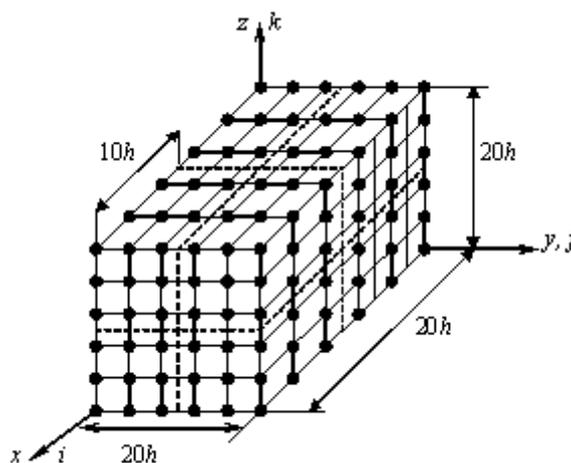


Рис. 2. Сложный МНКЭ V_e^b 1-го типа

Полную потенциальную энергию Π_e^b МНКЭ V_e^b представляем как сумму полных потенциальных энергий ДвКЭ V_i^a , $i = 1, \dots, M_a$, т. е.

$$\Pi_e^b = \sum_{i=1}^{M_a} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{q}_i^a)^T [K_i^a] \mathbf{q}_i^a - (\mathbf{q}_i^a)^T \mathbf{F}_i^a \right\}. \quad (8)$$

Обозначим через \mathbf{q}_e^b вектор узловых перемещений крупной сетки V_H^b сложного МНКЭ V_e^b . Используя (7), вектор \mathbf{q}_i^a узловых перемещений ДвКЭ V_i^a выражаем через вектор \mathbf{q}_e^b узловых перемещений крупной сетки V_H^b . В результате построим равенство

$$\mathbf{q}_i^a = [A_i^b] \mathbf{q}_e^b, \quad (9)$$

где $[A_i^b]$ – прямоугольная матрица, $i = 1, \dots, M_a$.

Подставляя (9) в выражение (8), из условия $\partial \Pi_e^b / \partial \mathbf{q}_e^b = 0$ получаем матричное уравнение $[K_e^b] \mathbf{q}_e^b = \mathbf{F}_e^b$, где

$$[K_e^b] = \sum_{i=1}^{M_a} [A_i^b]^T [K_i^a] [A_i^b], \quad \mathbf{F}_e^b = \sum_{i=1}^{M_a} [A_i^b]^T \mathbf{F}_i^a, \quad (10)$$

где $[K_e^b]$, \mathbf{F}_e^b – матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МНКЭ V_e^b 1-го типа.

Замечание 2. Как показывают расчеты, погрешность решения, построенное по МКЭ для трехмерных композитных пластин (балок), для которых заданы геометрические размеры, композитная структура, закрепление и нагружение, с применением сложных МНКЭ V_e^b 1-го типа определенных размеров, зависит от соотношения шагов узловых сеток V_i^h , V_i^H , V_H^b .

3. Процедура построения сложных МНКЭ второго типа. Основные положения процедуры рассмотрим на примере построения сложного МНКЭ V_α^p 2-го типа формы прямоугольного параллелепипеда. Область МНКЭ V_α^p представляем сложными МНКЭ V_e^b 1-го типа (см. п. 2), $e = 1, \dots, M_b$, M_b – общее число МНКЭ V_e^b . При этом сложные МНКЭ V_e^b имеют одинаковые геометрические размеры, крупные сетки V_H^b , неоднородную структуру и базовые разбиения. Крупные сетки V_H^b сложных МНКЭ V_e^b 1-го порядка ($e = 1, \dots, M_b$) образуют сетку H_b , на которой определяем крупную сетку V_H^p сложного МНКЭ V_α^p 2-го типа (сетка V_H^p вложена в сетку H_b). Функции перемещений u_p, v_p, w_p , построенные на крупной сетке V_H^p с помощью полиномов Лагранжа [7], запишем в виде

$$u_p = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^p q_\beta^u, \quad v_p = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^p q_\beta^v, \quad w_p = \sum_{\beta=1}^{m_0} N_\beta^p q_\beta^w, \quad (11)$$

где N_β^p – базисная функция β -гоузла сетки V_H^p ;

$q_\beta^u, q_\beta^v, q_\beta^w$ – значения соответственно функций u_p, v_p, w_p в β -м узле сетки V_H^p ;

m_0 – общее число узлов сетки V_H^p .

Полную потенциальную энергию Π_{α}^P сложного МнКЭ V_{α}^P 2-го порядка представляем как сумму полных потенциальных энергий сложных МнКЭ V_e^b 1-го порядка, $e = 1, \dots, M_b$ (см. п. 2), т. е.

$$\Pi_{\alpha}^P = \sum_{e=1}^{M_b} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{q}_e^b)^T [K_e^b] \mathbf{q}_e^b - (\mathbf{q}_e^b)^T \mathbf{F}_e^b \right\}. \quad (12)$$

Обозначим через \mathbf{q}_{α}^P вектор узловых перемещений крупной сетки V_H^P сложного МнКЭ V_{α}^P . Используя (11), вектор \mathbf{q}_e^b узловых перемещений сложного МнКЭ V_e^b 1-го типа выражаем через вектор \mathbf{q}_{α}^P узловых перемещений крупной сетки V_H^P МнКЭ V_{α}^P 2-го типа. В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_e^b = [A_e^P] \mathbf{q}_{\alpha}^P, \quad (13)$$

где $[A_e^P]$ – прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M_b$.

Подставляя (13) в выражение (12), из условия $\partial \Pi_{\alpha}^P / \partial \mathbf{q}_{\alpha}^P = 0$ получаем матричное уравнение $[K_{\alpha}^P] \mathbf{q}_{\alpha}^P = \mathbf{F}_{\alpha}^P$, где

$$[K_{\alpha}^P] = \sum_{e=1}^{M_b} [A_e^P]^T [K_e^b] [A_e^P], \quad \mathbf{F}_{\alpha}^P = \sum_{e=1}^{M_b} [A_e^P]^T \mathbf{F}_e^b, \quad (14)$$

где $[K_{\alpha}^P]$, \mathbf{F}_{α}^P – матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МнКЭ V_{α}^P 2-го типа.

Процедура построения сложных МнКЭ n -го типа ($n \geq 3$) аналогична процедуре п. 2, в которой вместо сложных МнКЭ 1-го типа используем сложные МнКЭ $(n-1)$ -го типа. Отметим, что в процедуре построения сложных МнКЭ вместо полиномов Лагранжа можно использовать интерполяционные полиномы [1, 7].

4. Определение напряжений в сложных МнКЭ. Пусть найдены узловые перемещения для многосеточной дискретной модели пластины, балки, т. е. найден вектор \mathbf{q}_{α}^P узловых перемещений сложного МнКЭ V_{α}^P 2-го типа, $\alpha = 1, \dots, M_p$, где M_p – общее число сложных МнКЭ V_{α}^P в дискретной модели пластины (балки). По формулам (13) определяем векторы \mathbf{q}_e^b узловых перемещений сложных МнКЭ V_e^b 1-го типа, $e = 1, \dots, M_b$. Используя формулы (9), находим векторы \mathbf{q}_i^a узловых перемещений ДвКЭ V_i^a , $i = 1, \dots, M_a$. С помощью вектора \mathbf{q}_i^a и формул (5) определяем векторы узловых перемещений КЭ V_j^h базового разбиения ДвКЭ V_i^a , $j = 1, \dots, M$. Затем, используя векторы \mathbf{q}_j , по известным алгоритмам МКЭ [1, 7] находим функции напряжений для КЭ V_j^h , $j = 1, \dots, M$.

5. Результаты расчетов. Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ модельную задачу о деформировании композитной трехмерной балки размерами $24h \times 120h \times 24h$ (рис. 3). При $y = 0$ балка жестко закреплена, граница крепления тела на рисунке 3 показана штриховкой. На верхней поверхности балки в точках с координатами $z = 24h$, x_k , y_i действуют вертикальные силы $P_z = 0,15$, где $x_k = 4h(k-1)$, $y_i = 20h + 4h(i-1)$, $k = 1, \dots, 7$; $i = 1, \dots, 26$; $h = 0,5$. Базовая дискретная модель балки состоит из изотропных однородных КЭ V_j^h 1-го порядка формы куба

со стороной h . Многосеточная дискретная модель балки состоит из сложных МКЭ V_e^d 1-го типа размерами $24h \times 24h \times 24h$, $e = 1, \dots, 5$. При построении сложного МКЭ V_e^d используем восемь ДвКЭ V_i^2 размерами $12h \times 12h \times 12h$, $i = 1, \dots, 8$.

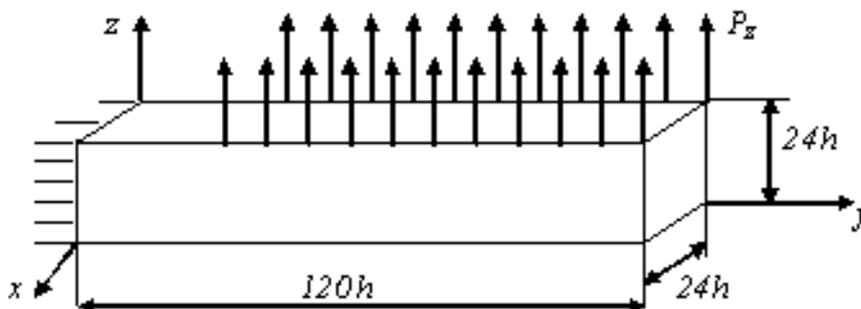


Рис. 3. Расчетная схема балки

Базовое разбиение ДвКЭ V_i^2 состоит из КЭ V_j^h 1-го порядка формы куба со стороной h , которое порождает мелкую сетку с шагом h . Крупная сетка ДвКЭ V_i^2 имеет шаг $2h$, шаг крупной сетки сложного МКЭ V_e^d равен $4h$. ДвКЭ V_i^2 и сложные МКЭ V_e^d построены соответственно по процедурам п. 1, 2 с применением полиномов Лагранжа. Балка армирована непрерывными волокнами (с поперечным сечением $h \times h$), направленными вдоль оси Oy . Расстояния между волокнами в направлении осей Ox , Oz равно $2h$. Модуль Юнга связующего материала балки равен 1, волокон – 10, коэффициент Пуассона равен 0,3.

Анализ результатов расчетов показывает, что максимальное перемещение $w_h = 265,154$ многосеточной дискретной модели балки отличается от максимального перемещения $w_0 = 273,721$ базовой модели на 3,13%. Максимальные эквивалентные напряжения $\sigma_h = 13,948$ многосеточной дискретной модели балки и $\sigma_0 = 14,888$ базовой модели отличаются на 6,31%. Базовая дискретная модель балки имеет 225 000 узловых неизвестных, ширина ленты системы уравнений МКЭ равна 2 911. Многосеточная дискретная модель балки содержит 4 410 узловых неизвестных, ширина ленты равна 2 057, т. е. многосеточная дискретная модель балки занимает в 96 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем базовая.

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
2. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982.
3. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. – Красноярск, 2000. – Деп. в ВИНТИ № 2990-В00.
4. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3.
5. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Изв. АлтГУ. Сер. «Математика и механика». – 2014. – № 1/1. – С. 80–83.
6. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982.
7. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981.

