УДК 512.57

ГРУППЫ АВТОТОПИЙ И СЛАБЫХ АВТОТОПИЙ АЛГЕБР

А.А. Беляков

Данная статья отражает продолжающие исследования автора по пятой проблеме Белоусова [1, с. 216] для квазигрупп методами универсальной алгебры [2]. Вводится понятие группы слабых автотопий алгебры и устанавливаются критерий эквивалентности (слабых) изотопий и необходимый признак (слабой) изотопности n-арных алгебр.

Определение, обозначение и некоторые свойства слабой изотопии можно найти в статье автора [3].

Теорема 1. Пусть $\varphi : \underline{A} \to \underline{A}$ – биекция, $O : \underline{A}^2 \to \underline{A}$ – квазибиекция. Тогда алгебра $A = (\underline{A}; \varphi O)$ – квазигруппа, причем ${}^{-1}(\varphi O)(x; y) = {}^{-1}O({}^{-1}\varphi x; y)$ и $(\varphi O)^{-1}(x; y) = O^{-1}(x; \varphi^{-1} y)$, где через ${}^{-1}\varphi$, равно, как и φ^{-1}, мы обозначили обратную биекцию к φ.

Доказательство. Поскольку φ и O биективны по переменному x, то φO - биекция по переменному x. Аналогично φO – биекция по переменному y. Следовательно, отображение $\varphi O : \underline{A}^2 \to \underline{A}$ является полубиекцией и поэтому φO является квазигрупповой операцией. Докажем, например, первую формулу. Очевидно, $\varphi O(z; y) = x \Leftrightarrow z = {}^{-1}(\varphi O)(x; y)$. С другой стороны, $\varphi O(z; y) = x \Leftrightarrow O(z; y) = {}^{-1}\varphi x \Leftrightarrow z = {}^{-1}O({}^{-1}\varphi x; y)$. Аналогично устанавливается истинность второй формулы. Теорема доказана.

Определение 1. Изотопия λ_1 алгебры $A = (\underline{A}; O)$ на алгебру $B = (\underline{B}; E)$ эквивалентна изотопии λ алгебры $A = (\underline{A}; O)$ на алгебру $B = (\underline{B}; E)$, если и только если выполняются равенства $\lambda_1(\underline{A}; O) = (\underline{B}; E)$ и $\lambda(\underline{A}; O) = (\underline{B}; E)$. Другими словами, λ_1-образ $\lambda_1(A)$ совпадает с λ-образом $\lambda(A)$ алгебры A.

Определение 2. Изотопию δ алгебры $A = (\underline{A}; O)$ на алгебру $A = (\underline{A}; O)$ ($\delta(A) = A$) назовем автотопией алгебры A.

Теорема 2. Для того, чтобы тройка отображений $\lambda_1 = (f_1; g_1; h_1) : \underline{A} \to \underline{B}$ была изотопией, эквивалентной изотопии $\lambda = (f; g; h)$ алгебры $A = (\underline{A}; \cdot)$ на алгебру $B = (\underline{B}; \circ)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_1^{-1}\lambda = (f_1^{-1}f; g_1^{-1}g; h_1^{-1}h)$ и $\lambda_1\lambda^{-1} = (f_1 f^{-1}; g_1 g^{-1}; h_1 h^{-1})$ были автотопиями алгебр $A = (\underline{A}; \cdot)$ и $B = (\underline{B}; \circ)$ соответственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ_1 – эквивалентна изотопии λ. Тогда из равенств $f(x \cdot y) = g(x) \circ h(y)$ и $X \circ Y = f_1(g_1^{-1}(X) \cdot h_1^{-1}(Y))$ для произвольных $x, y \in \underline{A}$ и $X, Y \in \underline{B}$ следует $f(x \cdot y) = g(x) \circ h(y) = f_1(g_1^{-1}g(x) \cdot h_1^{-1}h(y))$, а из равенств $f_1(x \cdot y) = g_1(x) \circ h_1(y)$, $X \circ Y = f(g^{-1}(X) \cdot h^{-1}(Y))$ вытекает $f_1(x \cdot y) = g_1(x) \circ h_1(y) = f(g^{-1}g_1(x) \cdot h^{-1}h_1(y))$, то есть имеем $f(x \cdot y) = f_1(g_1^{-1}g(x) \cdot h_1^{-1}h(y))$ и $f_1(x \cdot y) = f(g^{-1}g_1(x) \cdot h^{-1}h_1(y))$. Отсюда $f_1^{-1}f(x \cdot y) = g_1^{-1}g(x) \cdot h_1^{-1}h(y)$ и $f^{-1}f_1(x \cdot y) = g^{-1}g_1(x) \cdot h^{-1}h_1(y)$ и, следовательно, $\lambda_1^{-1}\lambda$ и $\lambda^{-1}\lambda_1$ – автотопии алгебры A, причем мы видим, что они обратимы.

Далее, из равенств $f^{-1}(X \circ Y) = g^{-1}(X) \cdot h^{-1}(Y)$ и $x \cdot y = f_1^{-1}(g_1(x) \circ h_1(y))$ заключаем $f^{-1}(X \circ Y) = g^{-1}(X) \cdot h^{-1}(Y) = f_1^{-1}(g_1 g^{-1}(X) \circ h_1 h^{-1}(Y))$. А из равенств $f_1^{-1}(X \circ Y) = g_1^{-1}(X) \cdot h_1^{-1}(Y)$ и $x \cdot y = f^{-1}(g(x) \circ h(y))$ вытекает $f_1^{-1}(X \circ Y) = g_1^{-1}(X) \cdot h_1^{-1}(Y) = f^{-1}(g g_1^{-1}(X) \circ h h_1^{-1}(Y))$, то есть $f^{-1}(X \circ Y) = f_1^{-1}(g_1 g^{-1}(X) \circ h_1 h^{-1}(Y))$ и $f_1^{-1}(X \circ Y) = f^{-1}(g g_1^{-1}(X) \circ h h_1^{-1}(Y))$. Отсюда, $f_1 f^{-1}(X \circ Y) = g_1 g^{-1}(X) \circ h_1 h^{-1}(Y)$ и $f f_1^{-1}(X \circ Y) = g g_1^{-1}(X) \circ h h_1^{-1}(Y)$ и, следовательно, $\lambda_1\lambda^{-1}$ и $\lambda\lambda_1^{-1}$ – автотопии алгебры B. Стало быть,

$\lambda_1^{-1}\lambda$ ($\lambda^{-1}\lambda_1$) и $\lambda_1\lambda^{-1}$ ($\lambda\lambda_1^{-1}$) – автотопии алгебр A и B соответственно. Достаточность. Пусть λ – изотопия и $\delta^{-1}=\lambda_1^{-1}\lambda$, $\varepsilon=\lambda_1\lambda^{-1}$ – автотопии. Это означает, что их компоненты являются биекциями. Отсюда $\lambda_1=\varepsilon\lambda=\lambda\delta$. Так как $\delta(\underline{A};\cdot)=(\underline{A};\cdot)$ и $\varepsilon(\underline{B};\circ)=(\underline{B};\circ)$, $\lambda(\underline{A};\cdot)=(\underline{B};\circ)$, то $\lambda_1(\underline{A};\cdot)=\varepsilon\lambda(\underline{A};\cdot)=\varepsilon(\underline{B};\circ)=(\underline{B};\circ)=\lambda(\underline{A};\cdot)$ и $\lambda_1(\underline{A};\cdot)=\lambda\delta(\underline{A};\cdot)=\lambda(\underline{A};\cdot)$, что и требовалось. Теорема доказана.

Определение 3. [3]. Слабая изотопия λ_1 n-арной алгебры $A=(\underline{A};O)$ на n-арную алгебру $B=(\underline{B};E)$ эквивалентна слабой изотопии λ алгебры $A=(\underline{A};O)$ на алгебру $B=(\underline{B};E)$, если и только если выполняются равенства $\lambda_1(\underline{A};O)=(\underline{B};E)$ и $\lambda(\underline{A};O)=(\underline{B};E)$. Другими словами, если совпадают слабые изотопные образы $\lambda_1(A)$ и $\lambda(A)$ алгебры A.

Определение 4. Слабую изотопию δ n-арной алгебры $A=(\underline{A};O)$ на n-арную алгебру $A=(\underline{A};O)$ ($\delta(A)=A$) назовем слабой автотопией алгебры A.

Теорема 3. Для того, чтобы тройка отображений $\lambda_1=(f_1;u_1;v_1)$ была слабой изотопией, эквивалентной слабой изотопии $\lambda=(f;u;v)$ алгебры $A=(\underline{A};\cdot)$ на алгебру $B=(\underline{B};\circ)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_1^{-1}\lambda=\left(f_1^{-1}f;\alpha_1(u;v);\beta_1(u;v)\right)$ и $\lambda_1\lambda^{-1}=\left(f_1f^{-1};u_1(\alpha;\beta);v_1(\alpha;\beta)\right)$, где $(u;v)^{-1}=(\alpha;\beta)$, $(u_1;v_1)^{-1}=(\alpha_1;\beta_1)$ были слабыми автотопиями алгебр $A=(\underline{A};\cdot)$ и $B=(\underline{B};\circ)$ соответственно.

Доказательство. Необходимость. Пусть λ_1 – эквивалентна слабой изотопии λ. Тогда из равенств $f(x\cdot y)=u(x;y)\circ v(x;y)$ и $X\circ Y=f_1(\alpha_1(X;Y)\cdot\beta_1(X;Y))$ для произвольных $x,y\in\underline{A}$ и $X,Y\in\underline{B}$ следует $f(x\cdot y)=u(x;y)\circ v(x;y)=f_1(\alpha_1(u(x;y);v(x;y))\cdot\beta_1(u(x;y);v(x;y)))$, а из равенств

$f_1(x\cdot y)=u_1(x;y)\circ v_1(x;y)$, $X\circ Y=f(\alpha(X;Y)\cdot\beta(X;Y))$ вытекает

$f_1(x\cdot y)=u_1(x;y)\circ v_1(x;y)=f(\alpha(u_1(x;y);v_1(x;y))\cdot\beta(u_1(x;y);v_1(x;y)))$. Следовательно,

имеем $f(x\cdot y)=f_1(\alpha_1(u(x;y);v(x;y))\cdot\beta_1(u(x;y);v(x;y)))$ и

$f_1(x\cdot y)=f(\alpha(u_1(x;y);v_1(x;y))\cdot\beta(u_1(x;y);v_1(x;y)))$. Отсюда

$f_1^{-1}f(x\cdot y)=\alpha_1(u(x;y);v(x;y))\cdot\beta_1(u(x;y);v(x;y))$ и

$f^{-1}f_1(x\cdot y)=\alpha(u_1(x;y);v_1(x;y))\cdot\beta(u_1(x;y);v_1(x;y))$ и, следовательно, $\lambda_1^{-1}\lambda$ и $\lambda^{-1}\lambda_1$ – слабые автотопии алгебры A, причем они взаимно обратны.

Далее, из равенств $f^{-1}(X\circ Y)=\alpha(X;Y)\cdot\beta(X;Y)$ и $x\cdot y=f_1^{-1}(u_1(x;y)\circ v_1(x;y))$ заключаем $f^{-1}(X\circ Y)=\alpha(X;Y)\cdot\beta(X;Y)=f_1^{-1}(u_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y))\circ v_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y)))$. А из равенств

$f_1^{-1}(X\circ Y)=\alpha_1(X;Y)\cdot\beta_1(X;Y)$ и $x\cdot y=f^{-1}(u(x;y)\circ v(x;y))$ вытекает

$f_1^{-1}(X\circ Y)=\alpha_1(X;Y)\cdot\beta_1(X;Y)=f^{-1}(u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y))\circ u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y)))$, то

есть $f^{-1}(X\circ Y)=f_1^{-1}(u_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y))\circ v_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y)))$ и

$f_1^{-1}(X\circ Y)=f^{-1}(u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y))\circ u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y)))$. Отсюда

$f_1f^{-1}(X\circ Y)=u_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y))\circ v_1(\alpha(X;Y);\beta(X;Y))$,

$f\,f_1^{-1}(X\circ Y)=u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y))\circ u(\alpha_1(X;Y);\beta_1(X;Y))$ и, следовательно, $\lambda_1\lambda^{-1}$ и $\lambda\lambda_1^{-1}$ – слабые автотопии алгебры B. Стало быть, $\lambda_1^{-1}\lambda$ ($\lambda^{-1}\lambda_1$) и $\lambda_1\lambda^{-1}$ ($\lambda\lambda_1^{-1}$) – слабые автотопии алгебр A и B соответственно. Достаточность. Пусть λ – слабая изотопия и $\delta^{-1}=\lambda_1^{-1}\lambda$, $\varepsilon=\lambda_1\lambda^{-1}$ – слабые автотопии. Тогда $\lambda_1=\varepsilon\lambda=\lambda\delta$. Так как $\delta(\underline{A};\cdot)=(\underline{A};\cdot)$ и $\varepsilon(\underline{B};\circ)=(\underline{B};\circ)$, $\lambda(\underline{A};\cdot)=(\underline{B};\circ)$, то $\lambda_1(\underline{A};\cdot)=\varepsilon\lambda(\underline{A};\cdot)=\varepsilon(\underline{B};\circ)=(\underline{B};\circ)=\lambda(\underline{A};\cdot)$ и $\lambda_1(\underline{A};\cdot)=\lambda\delta(\underline{A};\cdot)=\lambda(\underline{A};\cdot)$, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что множество $\underline{V(A)}$ автотопий и множество слабых автотопий $\underline{W(A)}$ алгебры A по операции произведения изотопий и соответственно слабых изотопий образуют группы $V(A)$ и $W(A)$ соответственно.

Определение 5. Группу $V(A)$ назовем группой автотопий алгебры A, а группу $W(A)$ назовем группой слабых автотопий алгебры A.

Поскольку всякая изотопия является частным случаем слабой изотопии, то всякая автотопия является частным случаем слабой автотопии, то есть $\underline{V(A)} \subseteq \underline{W(A)}$. Кроме того, произведение изотопий является частным случаем произведения слабых изотопий, и поэтому произведение автотопий является подоперацией произведения слабых автотопий. Следовательно, $V(A)$ является подгруппой группы $W(A)$, которую обозначим $V(A) \subseteq W(A)$. Точно так же устанавливается, что группа автоморфизмов $Aut(A)$ – подгруппа группы автотопий $V(A)$. Стало быть, для произвольной алгебры A мы имеем ряд групп: $Aut(A) \subseteq V(A) \subseteq W(A)$.

Следствие. Изоморфизм φ эквивалентен изотопии λ, если и только если $\varphi^{-1}\lambda$ и $\varphi\lambda^{-1}$ автотопии.

Теорема 4. [3, с. 26] Если алгебры $A = (\underline{A}; \cdot)$ и $B = (\underline{B}; \circ)$ изотопны, то их группы автотопий $V(A)$ и $V(B)$ изоморфны (на самом деле они сопряжены).

Для доказательства леммы 4 надо в доказательстве леммы 5 (см. ниже) везде вместо слов “слабая изотопия” и “слабая автотопия” записать “изотопия” и “автотопия” соответственно.

Теорема 5. Если алгебры $A = (\underline{A}; \cdot)$ и $B = (\underline{B}; \circ)$ слабо изотопны, то их группы слабых автотопий $W(A)$ и $W(B)$ сопряжены.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\wp : (\underline{A}; \cdot) \to (\underline{B}; \circ)$ - слабая изотопия, а $\varepsilon : (\underline{A}; \cdot) \to (\underline{A}; \cdot)$и $\delta : (\underline{B}; \circ) \to (\underline{B}; \circ)$ – слабые автотопии алгебр A и B. Легко видеть, что $\wp(\underline{A}; \cdot) = (\underline{B}; \circ) = \delta(\underline{B}; \circ) = \delta\wp(\underline{A}; \cdot)$, то есть $\wp(\underline{A}; \cdot) = \delta\wp(\underline{A}; \cdot)$ и тогда $\wp^{-1}\delta\wp(\underline{A}; \cdot) = (\underline{A}; \cdot)$. Таким образом, $\wp^{-1}\delta\wp$ – слабая автотопия алгебры A, то есть $\wp^{-1}\delta\wp \in \underline{W(A)}$, где $\delta \in \underline{W(B)}$. Следовательно, $\wp^{-1}\underline{W(B)}\wp \subseteq \underline{W(A)}$. Поскольку $\wp^{-1} : (\underline{B}; \circ) \to (\underline{A}; \cdot)$ также слабая изотопия, то мы аналогично получим $\wp^{-1}(\underline{B}; \circ) = \varepsilon\wp^{-1}(\underline{B}; \circ)$ и $\wp\varepsilon\wp^{-1}(\underline{B}; \circ) = (\underline{B}; \circ)$. Таким образом, $\wp\varepsilon\wp^{-1} \in \underline{W(B)}$, где $\varepsilon \in \underline{W(A)}$. Следовательно, $\wp\underline{W(A)}\wp^{-1} \subseteq \underline{W(B)}$ и $\underline{W(A)} \subseteq \wp^{-1}\underline{W(B)}\wp$. Оба включения $\wp^{-1}\underline{W(B)}\wp \subseteq \underline{W(A)}$ и $\underline{W(A)} \subseteq \wp^{-1}\underline{W(B)}\wp$ дают равенство $\wp^{-1}\underline{W(B)}\wp = \underline{W(A)}$ или $\underline{W(B)} = \wp\underline{W(A)}\wp^{-1}$. Если группы $W(A)$ и $W(B)$ сопряжены, то $\varphi : \varepsilon \mapsto \wp\varepsilon\wp^{-1}$ является изоморфизмом $W(A)$ на $W(B)$. В самом деле, если $\varphi(\varepsilon) = \wp\varepsilon\wp^{-1}$ и $\varphi(\delta) = \wp\delta\wp^{-1}$, то $\varphi(\varepsilon\delta) = \wp\varepsilon\delta\wp^{-1} = \wp\varepsilon\wp^{-1}\wp\delta\wp^{-1} = \varphi(\varepsilon)\varphi(\delta)$, то есть φ сохраняет операцию произведения слабых изотопий. Поскольку из $\varphi(\varepsilon) = \wp\varepsilon\wp^{-1}$ следует $\varepsilon = \wp^{-1}\varphi(\varepsilon)\wp$, то определено обратное отображение $\varphi^{-1} : \delta \mapsto (\wp^{-1})\delta(\wp^{-1})^{-1}$, что доказывает биективность отображения φ. Теорема доказана.

Поскольку изоморфизм является частным случаем изотопии и слабой изотопии, то, как следствие из теорем 5, 6 получаем хорошо известный результат о том, что если две алгебры изоморфны, то их группы автоморфизмов изоморфны.

Определение 6. Изотопия $\lambda = (f; g_1; g_2)$ алгебры $A = (\underline{A}; O)$ на алгебру $I = (\underline{A}; S)$ с тем же носителем $\underline{A}$ называется главной изотопией, если и только если $f = \Delta_A$. При этом алгебру I называют главным изотопом алгебры A.

Теорема 6. [3, с. 15]. Алгебры $A = (\underline{A}; \cdot)$ и $B = (\underline{B}; \circ)$ изотопны тогда и только тогда, когда некоторый главный изотоп $I = (\underline{A}; *)$ алгебры A изоморфен алгебре B.

Доказательство. Пусть $(f; g; h):(\underline{A}; \cdot) \to (\underline{B}; \circ)$ – изотопия. Тогда для любых $X, Y \in \underline{B}$ имеем $X \circ Y = f\left(g^{-1}(X; Y) \cdot h^{-1}(X; Y)\right)$ или $f(x \cdot y) = g(x) \circ h(y)$. Определим алгебру $I = (\underline{A}; *)$ по правилу: для любых $x, y \in \underline{I} = \underline{A}$ положим $x * y = \Delta_A(\gamma(x) \cdot \delta(y))$, где $\gamma = \left(f^{-1}g\right)^{-1}$, $\delta = \left(f^{-1}h\right)^{-1}$ или, что то же самое, $\Delta_A(x \cdot y) = f^{-1}g(x; y) * f^{-1}h(x; y)$. Далее очевидно, $(f; g; h) = (f; f; f)\left(\Delta_A; f^{-1}g; f^{-1}h\right)$. Определим изотопию $(f; f; f): I \to B$ по правилу: $X \circ Y = f\left(f^{-1}X * f^{-1}Y\right)$ или $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. Покажем корректность произведения изотопий. Очевидно, имеем равенства $f\Delta_A(x \cdot y) = f\left(f^{-1}g(x) * f^{-1}h(y)\right) = ff^{-1}g(x) \circ ff^{-1}h(y) = g(x) \circ h(y)$, то есть $f(x \cdot y) = g(x) \circ h(y)$, что и требовалось. Остается заметить, что $(f; f; f)$ изоморфизм алгебры I на алгебру B. Лемма доказана.

Определение 7. Слабая изотопия $\lambda = (f; u; v)$ алгебры $A = (\underline{A}; O)$ на алгебру $I = (\underline{A}; S)$ с тем же носителем $\underline{A}$ называется главной слабой изотопией, если и только если $f = \Delta_A$. При этом алгебру I называют главным слабым изотопом алгебры A.

Теорема 7. Алгебры $A = (\underline{A}; \cdot)$ и $B = (\underline{B}; \circ)$ слабо изотопны тогда и только тогда, когда некоторый главный слабый изотоп $I = (\underline{A}; *)$ алгебры A изоморфен алгебре B.

Доказательство. Пусть $(f; u; v):(\underline{A}; \cdot) \to (\underline{B}; \circ)$ – слабая изотопия. Тогда для любых $X, Y \in \underline{B}$ имеем $X \circ Y = f(\alpha(X; Y) \cdot \beta(X; Y))$ или $f(x \cdot y) = u(x; y) \circ v(x; y)$, где $(u; v)^{-1} = (\alpha; \beta)$. Определим алгебру $I = (\underline{A}; *)$ по правилу: для любых $x, y \in \underline{I} = \underline{A}$ положим $x * y = \Delta_A(\gamma(x; y) \cdot \delta(x; y))$, где $(\gamma; \delta) = \left(f^{-1}u; f^{-1}v\right)^{-1}$ или, что то же самое, $\Delta_A(x \cdot y) = f^{-1}u(x; y) * f^{-1}v(x; y)$. Далее, очевидно, $(f; u; v) = (f; f; f)\left(\Delta_A; f^{-1}u; f^{-1}v\right)$. Определим изотопию $(f; f; f): I \to B$ по правилу: $X \circ Y = f\left(f^{-1}X * f^{-1}Y\right)$ или $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. Покажем корректность произведения изотопий. Очевидно, имеем равенства $f\Delta_A(x \cdot y) = f\left(f^{-1}u(x; y) * f^{-1}v(x; y)\right) = ff^{-1}u(x; y) \circ ff^{-1}v(x; y) = u(x; y) \circ v(x; y)$, то есть $f(x \cdot y) = u(x; y) \circ v(x; y)$, что и требовалось. Остается заметить, что $(f; f; f)$ изоморфизм алгебры I на алгебру B. Теорема доказана.

Из доказанных теорем 6 и 7 вытекает, что всякую (слабую) изотопию можно разложить на произведение изоморфизма и главной (слабой) изотопии. Так как мы изучаем алгебры с точностью до изоморфизма, то отсюда вытекает, что достаточно изучать лишь главные (слабые) изотопы алгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967.
2. Кон П. Универсальная алгебра. – М.: Мир, 1968.
3. Беляков А.А. Слабая изотопия алгебр // Вестник КГТУ. – Красноярск, 1998.