УДК 512.54

К.А. Филиппов

О ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП В ГРУППАХ ШУНКОВА*

В статье рассмотрена периодическая группа Шункова, насыщенная некоторым множеством групп вида $M \times Q$, где M – конечная простая неабелева группа определённого вида, а Q является конечной 2-группой.

Ключевые слова: *насыщенность, группа Шункова, множество групп, неабелева группа*.

K.A. Filippov

ON THE FINITE GROUP DIRECT PRODUCTS IN THE SHUNKOV'S GROUPS

Shunkov's periodic group which is saturated with a number of the groups of $M \times Q$ type where M is finite simple non-Abelian group of the certain type, and Q is final 2-group is considered in the article.

Key words: *saturation, Shunkov's group, number of groups, non-Abelian group.*

Введение. Группа G насыщена группами из множества групп R, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из R. Множество R называется насыщающим множеством для G [14].

Решением вопросов, связанных с понятием насыщенности, посвящены уже многие работы [1, 6, 8, 11–16]. В настоящей статье продолжены исследования в этом направлении.

Пусть p – фиксированное простое нечётное число. Множество X_p состоит из групп вида $L = M \times Q$, где Q – конечная 2-группа, а M – группа из множества Y_p, которое является объединением следующих трёх множеств:

$$A = \{Sz(2^{2k+1}) \mid k \in I \subset N\},\ B = \{\mathrm{Re}(3^{2m+1}) \mid m \in G \subset N\},\ C = \{L_2(p^s) \mid s \in K \subset N, p \in T \subset D$$

– множество всех простых чисел}, и при этом каждая группа $M \in Y_p$ содержит элемент a порядка p, для которого $C_M(a)$ не содержит инволюций.

Основным результатом работы является Теорема. Если периодическая группа Шункова G насыщена группами из множества X_p, то все её элементы конечных нечетных порядков порождают в G локально конечную подгруппу R, изоморфную одной из групп $L_2(F), \mathrm{Re}(P), Sz(E)$ для подходящих локально конечных полей F, P, E и $G = R \times O_2(G)$.

Частный случай этого утверждения доказан в работе [1], в которой предполагается, что множество Y_p конечно.

1. Известные факты

Предложение 1 [10]. Фактор-группа группы Шункова по периодической центральной подгруппе является группой Шункова.

Предложение 2 [10]. В группе Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка существует бесконечная локально конечная подгруппа.

Предложение 3 [10]. Подгруппа группы Шункова, порожденная любым элементом простого порядка и произвольной инволюцией, конечна.

Из известных свойств групп $L_2(q)$, *Sz(q)* и $\mathrm{Re}(q)$ вытекают следующие два предложения:

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00509-а).*

Предложение 4 [3]. Пусть $M \in Y_p; j$ – инволюция и a – элемент порядка p из M. Тогда j^M – множество всех инволюций группы $M, a^k = a^{-1}$ для некоторой инволюции $k \in j^M$, и все подгруппы порядка p в M сопряжены.

Предложение 5 [4]. Пусть $M_1, M_2, M_3 \in Y_p$, тогда $(M_1 \times M_2) \cong X \subseteq M_3$.

Предложение 6 (теорема Судзуки [2]). Пусть $G = Sz(q)$; P – силовская 2-подгруппа группы G; $B = P\lambda H$ – подгруппа Бореля; H – подгруппа Картана из B. Тогда:

1. P – группа порядка q^2 периода 4, $P = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$.
2. Все инволюции группы G сопряжены и $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.
3. Любые две силовские 2-подгруппы в G имеют тривиальное пересечение.
4. H действует транзитивно на множестве инволюций из P.
5. G порождается любой парой своих силовских 2-подгрупп.
6. G не содержит элементов порядка 3.

Предложение 7 [15]. Пусть G – бесконечная периодическая группа; S – силовская 2-подгруппа группы G со следующими свойствами:

1. $|S| = S$.
2. S – элементарная абелева.
3. G – насыщена конечными простыми неабелевыми группами.

Тогда $G \cong \mathrm{Re}(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3 без подполей порядка 9.

Предложение 8 [10]. Пусть бесконечная периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми подгруппами и некоторая силовская 2-подгруппа S из G является конечной группой диэдра. Тогда G изоморфна локально конечной простой группе $L_2(P)$, где P – локально конечное поле нечетной характеристики P.

Предложение 9 [10]. Пусть $G = \mathrm{Re}(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$; q – инволюция из G; T – силовская 2-подгруппа в G. Тогда:

1. T – элементарная абелева группа порядка 8, $C_G(T) = T$ и $H = N_G(T) = T\lambda(\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle)$, где $\langle b\rangle\lambda\langle d\rangle$ – группа Фробениуса порядка 21.
2. $C_G(a) = \langle a\rangle \times L$, где $L \cong L_2(q)$.
3. $G = \langle H, C_G(a)\rangle = \langle S, C_G(a)\rangle$, где S – произвольная силовская 2-подгруппа группы G, не содержащая инволюции a.
4. Все инволюции из G сопряжены в G.

Предложение 10 [10]. Группа Шункова, насыщенная группами из $Sz(q)$, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе Судзуки $Sz(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.

Предложение 11 [16]. Пусть G – бесконечная локально конечная группа, насыщенная группами диэдра. Тогда в G существует строго возрастающая цепочка конечных групп диэдра

$$D^{(1)} \subset D^{(2)} \subset \ldots \subset D^{(n)} \subset \ldots$$

такая, что

$$G = \bigcup_i D^{(i)} = L\lambda\langle t\rangle,$$

где L – квазициклическая группа; t – инволюция и $l^t = l^{-1}$ для любого $l \in L$.

Предложение 12 (Шунков В.П. [17]). Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна и почти разрешима.

Предложение 13 (Теорема Санова [5, 7]). Произвольная группа, порядки элементов которой не превосходят 4, локально конечна.

Предложение 14 [8]. Периодическая группа G, насыщенная проективными специальными группами размерности 2 над конечными полями, изоморфна группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.

Предложение 15 [9]. Периодическая группа, насыщенная некоторым множеством простых групп $L_2(p^n)$, $Sz(2^{2k+1})$, изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Предложение 16 (Шунков В.П.) Пусть S – конечная подгруппа бесконечной 2-группы T. Тогда $N_T(S) \neq S$.

Доказательство. Индукция по $|S|$. При $|S| = 1$ предложение верно. Пусть $|S| \neq 1$ и t – инволюция из центра S. Если $C_T(t)$ конечен, то по теореме Шункова T локально конечна и S является собственной подгруппой некоторой конечной подгруппы H из T. Поскольку $N_H(S) \neq S$, то $N_T(S) \neq S$.

Если $C_T(t)$ бесконечен, $\overline{S} = S/\langle t \rangle$ – конечная подгруппа бесконечной подгруппы $\overline{C} = C_T(t)/\langle t \rangle$. По предположению индукции $N_{\overline{C}}(\overline{S}) \neq S$, откуда $N_T(S) \geq N_C(S) \neq S$. Предложение доказано.

2. Доказательство теоремы

По условию теоремы в G есть элементы простого нечетного порядка p, пусть a – такой элемент. Обозначим через J множество всех инволюций группы G, через $Y_p(G)$ – множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из Y_p, а через $X_з(G)$ – множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из X_p.

Лемма 1. Подгруппа $G_1 = \langle a^G \rangle$ насыщена группами из множества X_p.

Доказательство. Пусть K – произвольная конечная подгруппа из G_1. Она может содержать неединичный элемент нечетного порядка и может быть 2-группой. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) K содержит элемент нечетного порядка. По условию теоремы $K \subset L_1 = M_1 \times Q_1$, где $M_1 \in Y_p(G)$, а $L_1 \in X_p(G)$.

Тогда $K \subseteq L_2 = L_1 \cap G_1$ и L_2 содержит d элемент нечетного порядка. Ясно, что $d \in M_1$, а так как $M_1 \cap G_1 \lhd M_1$ и M_1 – конечная простая неабелева группа, то $M_1 \cap G_1 = M_1$. Следовательно, $L_2 = M_1 \times Q_2$, где $L_2 \in X_p(G)$ и $Q_2 = (Q_1 \cap G_1)$, и в этом случае лемма доказана.

2) K – 2-группа. По условию теоремы $K \subset L_1 = M_1 \times Q_1$, где $M_1 \in Y_p(G)$, а $L_1 \in X_p(G)$. Если $1 \neq (M_1 \cap G_1) \lhd M_1$, то $M_1 \cap G_1 = M_1$, поскольку M_1 – конечная простая неабелевая группа, и $M_1 \cdot K \subseteq L_2 = (L_1 \cap G_1) = (M_1 \times Q_2)$ где $L_2 \in X_p(G)$, $Q_2 = G_1 \cap Q_1$, и в этом случае лемма также доказана.

Пусть $M_1 \cap G_1 = 1$. Возьмем в M_1 элемент d простого порядка, отличного от 2. Тогда $\langle d, d^y \rangle$, где $y \in a^G$, – конечная группа и $\langle d, d^y \rangle \subseteq M_2 \in Y_p(G)$. Но тогда $d^{-1}y^{-1}dy \in (G_1 \cap M_2) \lhd M_2$ и, значит, $d^{-1}y^{-1}dy = 1$. Действительно, $M_2 \cap G_1 = 1$, поскольку $1 \neq d \in (M_1 \cap M_2)$, и если $M_2 \cap G_1 \neq 1$, то в силу простоты M_2, $M_2 \cap G_1 = 1$, а значит, $d \in G_1$, что невозможно. Таким образом, $dy = yd$ для любых $y \in a^G$ и все элементы простых порядков, отличных от 2, из M_1 перестановочны поэлементно с G_1. Так как подгруппа, порожденная всеми элементами простых порядков, отличных от 2, из M_1, нормальна в M_1, то в силу простоты M_1 получим, что M_1 порождается всеми элементами простых порядков, отличных от 2. Последнее означает, что M_1 и G_1 поэлементно перестановочны, т.е. в G можем рассмотреть подгруппу $G_1 \times M_1$.

Возьмем в G_1 конечную простую неабелевую подгруппу M_3, такую, что $M_3 \in Y_p(G)$. Такая группа существует по условию теоремы. Рассмотрим конечную подгруппу $M_4 = M_3 \times M_1$.

По условию теоремы $M_4 \subseteq M_5 \in Y_p(G)$. Но никакая группа из Y_p не содержит подгрупп, изоморфных M_4 (предложение 5). Следовательно, предположение о том, что $M_1 \cap G_1 = 1$, не верно. Значит, $M_1 \cap G_1 = 1$, и, как показано выше, в этом случае лемма доказана.

Лемма 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $G = G_1 = \langle a^G \rangle$.

Доказательство. По лемме 1 $G_1 = \langle a^G \rangle$ удовлетворяет условиям теоремы.

Предположим, что для G_1 теорема верна, в частности, все элементы нечетного порядка в G_1 порождают локально конечную подгруппу R, изоморфную одной из групп в формулировке теоремы. Пусть x – элемент нечетного порядка из $G \setminus R$. Подгруппа $R \cdot \langle x \rangle$ – локально конечна. Возьмём $1 \neq d \in R$ и рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, d \rangle$. По условиям теоремы $\langle x, d \rangle$ содержится в конечной подгруппе L_1 группы G, при этом $L_1 = M_1 \times Q_1$, где $M_1 \in Y_p(G)$, а $L_1 \in X_p(G)$. Так как $R \cap M_1 \leq M_1$, то $M_1 < R$, а поскольку x – элемент нечетного порядка, то $x \in M_1$. Получили противоречие с выбором x. Следовательно, все элементы нечетных порядков из G лежат в R, а потому R – нормальная подгруппа группы G. Так как подгруппа R проста, то $R \cap O_2(G) = 1$, и мы можем образовать подгруппу $H = R \times O_2(G)$. Для доказательства леммы нам надо установить равенство $H = G$. Предположим, что это не так и, пусть $g \in G \setminus H$. Обозначим через E некоторую конечную простую неабелеву подгруппу группы G. Если при этом G содержит подгруппу A, изоморфную $\mathrm{Re}(Q)$, то считаем, что $E = A$. Из локальной конечности и нормальности подгруппы R выводим, что $\langle E, g \rangle$ – конечная подгруппа. По условию теоремы она содержится в подгруппе вида $L_2 = M_2 \times Q_2$, где $M_2 \in Y_p(G)$, $L_2 \in X_p(G)$. Ясно, что $E \leq M_2 \leq R$. Следовательно, $g = rd$, где $r \in R$, $d \in Q_2$, $d \notin H$, и d централизует M_2. Обозначим через b элемент из R, для которого $bd \neq db$ (такой элемент существует, так как в противном случае $d \in C_G(R) = O_2(G)$ и $d \in H$).

Рассмотрим теперь конечную подгруппу $K = \langle L_2, b \rangle$. В силу условия теоремы $K \leq L_3 = M_3 \times Q_3$, где $M_3 \in Y_p(G)$, $L_3 \in X_p(G)$. Отсюда выводим, что $d = yz = zy$, где $y \in M_3$, $z \in Q_3$. Заметим, что $1 \neq y = dz^{-1}$, y является 2-элементом и $y \in C_G(M_2)$. Пусть i – инволюция из $\langle y \rangle$. Итак, мы получили следующую ситуацию: в группе M_3 имеется инволюция i, которая централизует её подгруппу M_2. Это невозможно, если M_3 одна из групп $L_2(2^n)$, $Sz(2^{2k+1})$, поскольку в этих подгруппах централизатор любой инволюции является 2-группой. Если $M_3 \cong L_2(p^s)$, $p > 2$, то это невозможно так как централизатор любой инволюции в такой группе разрешим (является группой диэдра). Пусть, наконец, $M_3 \cong \mathrm{Re}(q)$. В силу выбора подгруппы E отсюда выводим, что $E \cong \mathrm{Re}(q)$ и инволюция i централизует эту подгруппу. Последнее невозможно в виду предложения 9. Итак, мы получили противоречие. Значит, лемма верна.

Далее мы будем считать, что $G = G_1 = \langle a^G \rangle$.

Лемма 3. Если N – собственная нормальная подгруппа группы G, то $N \leq Z(G)$ и N – 2-группа.

Доказательство. Пусть $G = \langle a^G \rangle$, подгруппа N нормальна в G и $1 \neq N \lhd G$. Очевидно, $a \notin N$. Допустим, что $a \neq a^x$ для некоторого элемента x из N. Так как подгруппа $L_x = \langle a, a^x \rangle$ конечна, то по условиям теоремы $L_x \le L \le G$, $L = M \times Q$, $M \in Y_p(G)$, а $L \in X_p(G)$. Все элементы порядка p из L, очевидно, содержатся в M и ввиду простоты группы M из $1 \ne a^{-1}x^{-1}ax \in N \cap M$ заключаем, что $M \le N$ и $N = G$. Полученное противоречие означает, что $a^{-1}x^{-1}ax = 1$ для любого элемента $x \in N$, $b^{-1}x^{-1}bx = 1$ для всех элементов $b \in a^G$. Следовательно, $N \le Z(G)$. Пусть t – произвольный элемент из N. По условию теоремы $t \in L_1 = (M_1 \times Q_1)$, где $M_1 \in Y_p(G)$, а $L_1 \in X_p(G)$. Как показано выше, $t \in Z(G)$ и, значит, $t \in Q_1$, т.е. t – 2-элемент. В силу произвольности выбора t из N получаем, что N – 2-группа. Лемма доказана.

Лемма 4. Если теорема для группы G не верна, то можно считать, что G – бесконечная группа, и $O_2(G) = 1$.

Доказательство. Если G – конечная группа, то из условия теоремы непосредственно следует, что $G \in X_p(G)$ и теорема верна. Пусть группа G бесконечна. Докажем, что условия теоремы переносятся на фактор-группы $\overline{G} = G / O_2(G)$. По лемме 3 $O_2(G)$ содержится в $Z(G)$ и по предложению 1 $\overline{G}$ является группой Шункова. Пусть $\overline{L}_0$ – произвольная конечная подгруппа в $\overline{G}$. Ввиду теорема Шмидта полный прообраз L_0 подгруппы $\overline{L}_0$ в G локально конечен. Значит, $L_0 = KO_2(G)$ для некоторой конечной подгруппы K из L_0. По условию насыщенности $K \le l = M \times Q < G$, где. $L \in X_p(G)$, а $M \in Y_p(G)$. Поскольку $O_2(G)$ – 2-группа, а M – простая конечная неабелева группа, то $M \cap O_2(G) = 1$ и $\overline{L}_o \le \overline{M} \times \overline{Q}$, где $\overline{M} \cong M$, $\overline{Q} = Q \cdot O_2(G) / O_2(G)$ – единичная, или конечная 2-группа. Следовательно, факторгруппа $G / O_2(G)$ наследует условие насыщенности группами из X_p. Если $G / O_2(G)$ конечна, то полагая $\overline{L}_0 = \overline{G}$ получим $\overline{L}_0 = \overline{G} \cong \overline{M}$ и, очевидно, $G = M \times O_2(G)$, что доказывает теорему. Таким образом, если G – контрпример к теореме, то G – так же контрпример к теореме и $O_2(G) = 1$. Положим $G = \overline{G}$. Лемма доказана.

Пусть $k \in J$ и $L_0 = \langle a, k \rangle$. По предложению 3 подгруппа L_0 конечна и по условию насыщенности $L_0 \le L < G$, где $L = M \times Q$, $M \in Y_p(G), L \in X_p(G)$. Ввиду предложения 4 имеет место

Лемма 5. Произвольная инволюция j из подгруппы L либо перестановочна со всеми элементами порядка p из L, либо не перестановочна ни с одним из них, при этом инвертирует некоторый элемент порядка p из a^L. В первом случае $j \in Q$, во втором либо $j \in M$, либо $j = zt$, где z – инволюция из Q, t – инволюция из M.

Лемма 6. Если инволюция j перестановочна с некоторым элементом из a^G, то j перестановочна с каждым элементом из a^G, то есть ($j \in C_G(a^G)$).

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $aj = ja$. Пусть $b \in a^G$ и допустим, что $jb \ne bj$ и $b^j = b^{-1}$. По предложению 4 подгруппа $\langle b, j \rangle$ конечна. Как и выше, $\langle b, j \rangle \le L = M \times Q < G$, где $M \in Y_p(G)$, а $L \in X_p(G)$. Так как $jb \ne bj$, то ввиду леммы 5 j инвертирует некоторый элемент порядка p из M . Поскольку все подгруппы порядка p в M сопряжены (предложение 4), то j инвертирует некоторый элемент d из a^G. Рассмотрим $S = \langle d, a, j \rangle$. Тогда группа S конечна и по условию теоремы $S \le L_1 = M_1 \times Q_1$, где $M_1 \in Y_p(G), L_1 \in X_p(G)$, а $\langle a, d \rangle \subseteq M_1$. Но равенства $a^j = a$ и $b^j = b^{-1}$ противоречат лемме 5. Значит, $jb = bj$ для любого элемента $b \in a^G$. Лемма доказана.

Лемма 7. G не содержит инволюций перестановочных с элементом a.

Доказательство. Предположим обратное и пусть j – такая инволюция. По лемме 6 $j \in Z(G)$, что противоречит лемме 4. Лемма доказана.

Лемма 8. G насыщена группами из множества Y_p.

Доказательство. Пусть K – конечная группа из G. По условию насыщенности $K < M \times Q_2$, где M содержит элемент a из a^G. Тогда по лемме 7 $Q_2 = 1$ и, следовательно, $K \le M \in Y_p$. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть группа G содержит подгруппу L, изоморфную группе $\mathrm{Re}(Q)$. Тогда G изоморфна группе $\mathrm{Re}(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.

Доказательство. В силу предложения 9 L содержит подгруппу $K = \langle x \rangle \times ((\langle y \rangle \times \langle z \rangle)\lambda\langle d \rangle)$, где $|x| = |y| = |z| = 2$, $|d| = 3$; $(\langle y \rangle \times \langle z \rangle)\lambda\langle d \rangle$ изоморфна знакопеременной группе A_4. Предположим, что порядок силовской 2-подгруппы S группы G равен 8. Тогда $G \cong \mathrm{Re}(Q)$ по предложению 7. Покажем, что случай $|S| > 8$ невозможен.

Действительно, пусть $|S| > 8$. Рассмотрим 2-подгруппу $A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle z \rangle$. Она содержится в некоторой подгруппе S_1 порядка 16 (см. предложение 16). Так как $d \in N_G(A)$, $|S_1 : A| = 2$ и G – группа Шункова, то $B = \langle S_1, d \rangle$ – конечная группа со свойствами: порядок силовской 2-подгруппы из B больше 8; B содержит элементарную абелеву 2-подгруппу порядка 8; B содержит элемент порядка 6. Заметим теперь, что группы из насыщающего множества подгрупп с такими свойствами не содержат. Получили противоречие. Значит, $G \cong \mathrm{Re}(Q)$ и лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Если G содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{Re}(Q)$, то теорема верна согласно лемме 9. Если группа G не содержит такую подгруппу, то теорема справедлива в силу предложения 15.

Литература

1. *Дуж А.А., Созутов А.И., Филиппов К.А.* О группах Шункова с одним условием насыщенности // Алгебра, логика и методика обучения математике: мат-лы Всерос. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения С.Л. Эдельмана. – Красноярск, 2010. – С. 58–63.
2. *Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968.
3. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. – М.: Мир, 1985.
4. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука 1996.
5. *Лыткина Д.В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сиб. мат. журн. – 2007. – № 2 (48). – С. 353–358.
6. *Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.* О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических и проективных специальных линейных групп // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – №2 (16). – С. 177–185.
7. *Санов И.Н.* Решения проблем Бернсайда для периода 4 // Учен. записки ЛГУ. Сер. матем. – 1940. – С. 166–170.
8. *Филиппов К.А., Рубашкин А.Г.* О периодических группах насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журнал. – 2005. – №6 (46). – С. 1388–1392.
9. *Филиппов К.А.* Группы Цассенхауза с бесконечной силовской 2-подгруппой. – 2005. – С. 109–110.
10. *Шлёпкин А.К.* Группы Шункова с дополнительными ограничениями: автореф. … дис. д-ра физ.-мат. наук. – Красноярск, 1998.
11. *Шлепкин А.К.* О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. – 1998. – №5 (37). – С. 606–615.
12. *Шлепкин А.К.* О периодической части некоторых групп Шункова // Алгебра и логика. – 1999. – №1. – С. 96–125.

13. *Шлёпкин А.К.* О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. тр. – 1998. – №1. – С. 129–138.
14. *Шлёпкин А.К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы: сб. тез. III междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1993. – С. 369.
15. *Шлёпкин А.К., Васильева О.В.* О периодических группах с абелевой силовской 2- подгруппой порядка 8 // Мат. сист. – 2001. – С. 54–60.
16. *Шлёпкин А.К., Рубашкин А.Г.* Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. – 2005. – №1. – С. 110–119.
17. *Шунков В.П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. – 1972. – №4. – С. 470–494.