

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ¹

Изложены процедуры построения многосеточных конечных элементов сложной формы с применением локальных аппроксимаций, которые учитывают композитную структуру тел и порождают дискретные модели малой размерности.

Ключевые слова: упругие тела, многосеточные элементы сложной формы, локальные аппроксимации, дискретные модели малой размерности.

A.D. Matveev

CONSTRUCTING THE MULTIGRID FINITE ELEMENTS OF IRREGULAR SHAPE USING LOCAL APPROXIMATION

The constructing procedures of the irregular shape multi-grid finite elements, using local approximation that takes into account composite body structure and produces small dimensional discrete models are set forth.

Key words: elastic bodies, multi-grid finite elements of irregular shape, local approximations, small dimensional discrete models.

При анализе упругих тел широко применяют метод конечных элементов (МКЭ) [1,2]. Для более точной дискретизации областей используют конечные элементы (КЭ) сложной формы и разных размеров (криволинейные треугольные, четырехугольные, параллелепипедальные). Реализация МКЭ с применением криволинейных КЭ требует сложных вычислений. Построение для тел сложной формы регулярных разбиений, которые достаточно точно учитывают сложную границу тел, порождает базовые дискретные модели очень высокой размерности. Это создает определенные трудности при реализации МКЭ, которая требует большого объема памяти ЭВМ и больших временных затрат.

Как известно [3–6], достоинства многосеточных конечных элементов (МнКЭ) заключаются в том, что они способны учитывать сложную структуру композитов и порождают многосеточные дискретные модели, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей базовых моделей. Поэтому реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует значительно меньше времени счета и объема памяти ЭВМ, чем для базовых. В [3–6] численно исследуются МнКЭ формы куба, прямоугольного параллелепипеда (квадрата, прямоугольника). Применение таких МнКЭ для анализа упругих тел сложной формы затруднительно.

Следует отметить, что наиболее достоверно деформирование упругих тел (при малых деформациях) описывают дифференциальные уравнения трехмерной задачи теории упругости [7], записанные в декартовой системе координат. Уравнения теории упругости, представленные в полярных, цилиндрических координатах имеют особенности, т. е. не во всех точках области тела они могут применяться. Кроме того, применение криволинейных систем координат при построении уравнений теории упругости порождает определенные законы для полей деформаций, напряжений упругих тел (конструкций), которые не зависят от характера и вида нагрузений, что не всегда соответствует реальности.

В данной работе изложены некоторые подходы и процедуры построения МнКЭ сложной формы. Предлагаемые процедуры построения МнКЭ реализуются в декартовых системах координат.

1. Построение многосеточных конечных элементов с применением локальных аппроксимаций. Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ композитный МнКЭ V_e формы прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$ (рис. 1). Суть построения трехмерного МнКЭ V_e состоит в следующем [4]. Вначале область V_e представляем базовым разбиением, которое состоит из КЭ первого порядка формы куба, порождает мелкую узловую сетку и учитывает композитную структуру. С помощью метода конденсации строим суперэлемент V_e^s [2], т.е. неизвестные МКЭ внутренних узлов мелкой сетки выражаем через неизвестные тех узлов мелкой сетки, которые лежат на границе области V_e .

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00053).

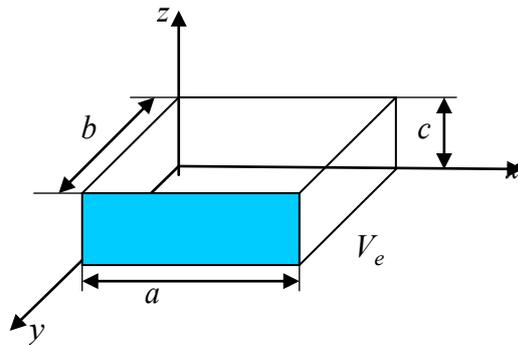


Рис. 1. Трехмерный МКЭ V_e

На гранях суперэлемента V_e^s определяем крупные узловые сетки, вложенные в мелкую. Затем узловые неизвестные суперэлемента с помощью аппроксимаций, построенных для перемещений на крупных сетках, выражаем через узловые неизвестные крупных сеток. Используя аппроксимации перемещений базового разбиения и аппроксимации перемещений, построенных на крупных сетках, по известным алгоритмам [4] строим матрицу жесткости и вектор узловых сил МКЭ V_e . Пусть размерности трех крупных узловых сеток (построенных на смежных гранях параллелепипеда V_e) различны. В этом случае получаем четырехсеточный КЭ, так как при его построении используем четыре различные узловые сетки: трехмерную мелкую и три двумерных крупных сетки. На крупных узловых сетках аппроксимирующие функции перемещений u, v, w представляем через функции Лагранжа [8]. Пусть крупная узловая сетка для нижней грани МКЭ V_e (рис. 1, $z = 0$) имеет n узлов по оси x и m узлов по оси y . На рисунке 2 показана крупная сетка нижней грани, $n = 25$, $m = 17$, оси x, y декартовой системы координат и оси i, j целочисленной системы координат (узлов крупной сетки) совмещены, узел ij крупной сетки отмечен точкой. Аппроксимирующая функция перемещений u , построенная на крупной узловой сетке с помощью полиномов Лагранжа, имеет вид [8]

$$u = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} N_{ij} u_{ij}, \quad (1)$$

где N_{ij} – базисная функция для узла ij крупной сетки;

u_{ij} – значение функции u в узле ij крупной сетки.

$$N_{ij} = L_i^n(x) L_j^m(y). \quad (2)$$

Полиномы Лагранжа L_i^n, L_j^m определяют по формулам [8]

$$L_i^n(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad L_j^m(y) = \prod_{k=1, k \neq j}^m \frac{y - y_k}{y_j - y_k}, \quad (3)$$

здесь x_i, y_j – координаты узла ij крупной сетки (рис. 2).

Аналогичные аппроксимирующие полиномы Лагранжа используются для перемещений v, w .

Отметим некоторые трудности, которые возникают при реализации МКЭ с применением МКЭ. Согласно (1)–(3) для вычисления значения функции перемещений u в точке с координатами x, y (при $n=m$) необходимо выполнить n^4 последовательных умножений чисел. Расчеты упругих тел, проведенные на ЭВМ

с помощью языка FORTRAN с двойной точностью, показывают, что при $n \geq 18$ операция последовательных умножений чисел порождает погрешность (связанную с погрешностью вычислений ЭВМ), которая приводит к численной неустойчивости решений, построенных по МКЭ.

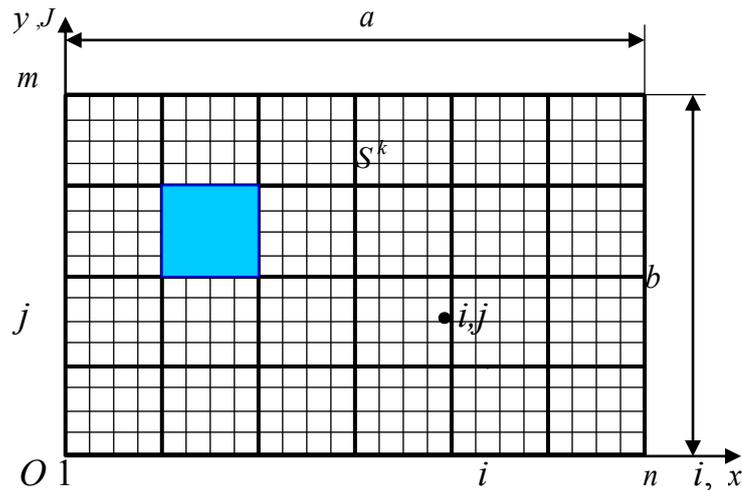


Рис. 2. Разбиение нижней грани МКЭ V_e на подобласти

С другой стороны, применение аппроксимаций малого порядка порождают решения с большой ошибкой. В связи с этим в данной работе предлагается при построении МКЭ сложной формы использовать локальные аппроксимации. Краткая суть применения локальных аппроксимаций при построении МКЭ состоит в следующем. Области граней МКЭ (см. рис. 1), на которых строим крупные узловые сетки, представляем непересекающимися подобластями. На рисунке 2 квадратные подобласти S^k (где $k = 1, \dots, 24$) одинаковых размеров отмечены жирными линиями, типовая подобласть закрашена. На подобластях определяем крупные узловые сетки, на которых строим локальные аппроксимирующие функции (перемещений) малого порядка. При этом на общей границе двух подобластей узлы крупных сеток совпадают. В качестве локальных аппроксимаций для перемещений на подобластях прямоугольной формы можно использовать полиномы Лагранжа невысокого порядка, $n, m \leq 5$. Для подобластей S^k (см. рис. 2) полиномы Лагранжа имеют четвертый порядок, $n, m = 4$. На гранях МКЭ сложной формы следует использовать локальные аппроксимации. Трехмерные МКЭ сложной формы типа пластины (толстой плиты) с вырезами представлены на рисунке 3.

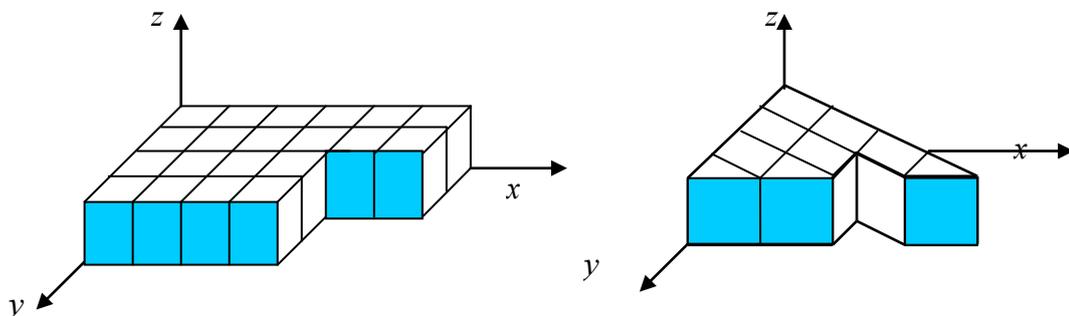


Рис. 3. Трехмерные МКЭ сложной формы

На рисунке 3 показаны прямоугольные и треугольные подобласти граней МКЭ сложной формы, на крупных узловых сетках которых определяются локальные аппроксимации для перемещений.

2. Построение двухсеточных конечных элементов сложной формы с применением известных аппроксимирующих полиномов. Вданном параграфе предложены два подхода построения композитных двухсеточных КЭ (ДвКЭ) сложной формы. Как известно [3], для построения композитного ДвКЭ формы пря-

моугольного параллелепипеда (прямоугольника) используют две вложенные узловые сетки: мелкую и крупную. Мелкая узловая сетка порождена базовым разбиением области ДвКЭ на КЭ первого порядка формы куба (квадрата), которое учитывает его композитную структуру. На мелкой сетке определяем крупную узловую сетку ДвКЭ. Узловые перемещения мелкой узловой сетки с помощью аппроксимаций, которые построены на крупной сетке с применением полиномов Лагранжа [8], выражаем через узловые перемещения крупной сетки. Число узлов крупной сетки определяет размерность ДвКЭ, которая существенно меньше размерности мелкой сетки. Используя аппроксимации перемещений базового разбиения и аппроксимирующие функции перемещений, построенные на крупной сетке, по известным алгоритмам [3] определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ.

Первый подход применяется для граничных композитных ДвКЭ сложной формы. Суть первого подхода кратко рассмотрим на примере построения граничного двумерного композитного ДвКЭ S_p первого порядка сложной формы, который расположен в декартовой системе координат Oxy (рис. 4) и испытывает плоское напряженное состояние. Пусть область ДвКЭ S_p имеет криволинейную границу AB , которая совпадает с границей композита. На рисунке 4 граница AB отмечена жирной линией, пусть на границе AB композит закреплен. Вначале на области $ABCD$ строим базовое разбиение ДвКЭ S_p , состоящее из квадратных КЭ первого порядка со стороной h . Базовое разбиение учитывает сложную форму области ДвКЭ S_p (криволинейную границу AB), учитывает композитную структуру, кинематические граничные условия на границе AB и порождает мелкую квадратную сетку с шагом h . На рисунке 4 показана сетка базового разбиения, на которой жесткие частицы (размерами $2h \times 2h$) закрашены.

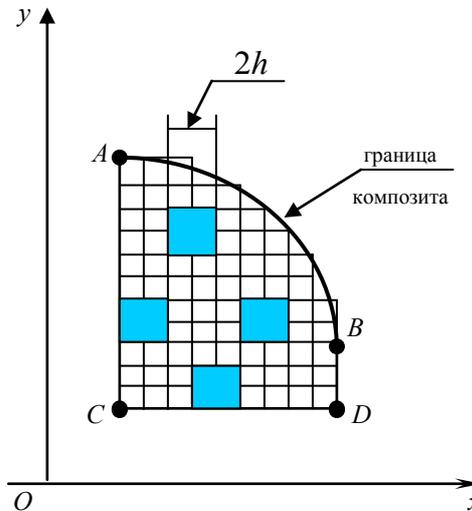


Рис. 4. Базовое разбиение ДвКЭ S_p

Используя аппроксимации перемещений мелкой сетки и аппроксимирующие функции перемещений, построенные на крупной сетке (узлы A, B, C, D крупной сетки ДвКЭ на рис. 4 отмечены точками), по известным алгоритмам [3] строим матрицу жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ S_p . Итак, ДвКЭ S_p может сколь угодно точно учитывать криволинейную границу AB и сложную композитную структуру (за счет выбора шага h мелкой квадратной сетки). При построении граничных двумерных ДвКЭ сложной формы (плоской задачи упругости [7]) в качестве крупных узловых сеток можно использовать узловые сетки известных криволинейных двумерных КЭ первого, второго и третьего порядка [1,2] и известные аппроксимирующие полиномы, построенные для крупных сеток в декартовых системах координат. На рисунке 5 представлен граничный двумерный ДвКЭ S^e второго порядка сложной формы, узлы крупной сетки которого отмечены точками. Криволинейная граница $A_1 B_1 C_1$ ДвКЭ S^e (на рис. 5 отмечена жирной линией) совпадает с границей двумерного тела. На рисунке 6 в декартовой системе координат $Oxyz$ показан трехмерный ДвКЭ V^e первого порядка сложной формы, узлы крупной сетки которого отмечены точками. Криволинейная граница $A_2 B_2$

$C_2 D_2$ ДвКЭ V^e совпадает с границей трехмерного тела, остальная часть границы ДвКЭ состоит из пяти граней, которые параллельны соответствующим плоскостям Oxy , Oxz , Oyz . Процедуры построения ДвКЭ S^e и V^e аналогичны вышеописанной.

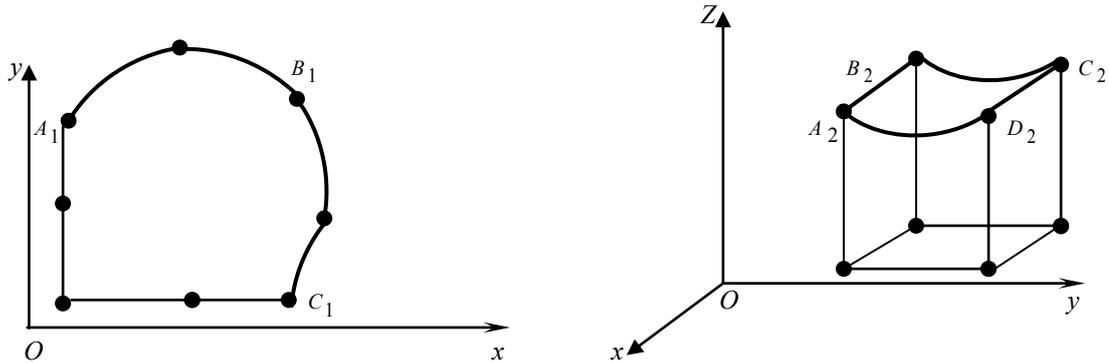


Рис. 5. Крупная сетка ДвКЭ S^e Рис. 6. Трехмерный ДвКЭ V^e

Во втором подходе область сложной формы трехмерного (двумерного) композитного ДвКЭ заменяем областью более простой формы, например, прямоугольным параллелепипедом, кубом (прямоугольником, квадратом), объем (площадь) которой приближенно равен объему (площади) исходной области ДвКЭ. При построении ДвКЭ используем базовое разбиение, построенное для области простой формы, и крупную сетку, которая определена для области ДвКЭ сложной формы. В этом случае упрощается процедура построения ДвКЭ.

Основные положения второго подхода построения ДвКЭ рассмотрим на примере композитного ДвКЭ S_e первого порядка формы трапеции $ABCD$ (рис. 7), области жестких квадратных частиц закрашены.

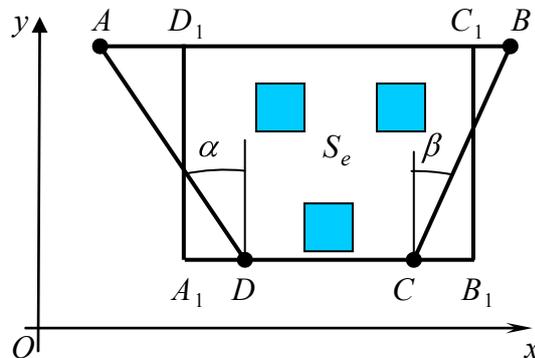


Рис. 7. Узлы крупной сетки ДвКЭ S_e формы трапеции

ДвКЭ S_e расположен в декартовой системе координат Oxy и испытывает плоское напряженное состояние [7]. Пусть углы α , β малы. В силу малости углов α , β область трапеции приближенно представляем прямоугольной областью $A_1 B_1 C_1 D_1$, площадь которой равна площади трапеции, т. е. $A_1 B_1 = (AB + CD)/2$. На области $A_1 B_1 C_1 D_1$ строим базовое разбиение ДвКЭ S_e , которое состоит из квадратных КЭ первого порядка, порождает мелкую узловую сетку и учитывает композитную структуру. Используя аппроксимации перемещений базового разбиения и аппроксимации, построенные для перемещений u, v на крупной сетке, узлы A, B, C, D которой на рисунке 7 отмечены точками, по известным алгоритмам [3] строим матрицу жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ S_e формы трапеции.

На рисунке 8 показано разбиение двумерного тела S (половина круглой шайбы) на ДвКЭ S_e (где $e = 1, 2, 3$) первого порядка формы трапеции (см. рис. 7). В данном случае боковая сторона AD (BC) ДвКЭ S_e (см. рис. 7) лежит на радиусе R внешней окружности шайбы S , $\alpha = \beta$ (рис. 8). Поскольку при увели-

чении числа ДвКЭ $S_e \alpha \rightarrow 0$, то описанную выше процедуру построения ДвКЭ формы трапеции можно использовать в расчетах по МКЭ двумерного тела S .

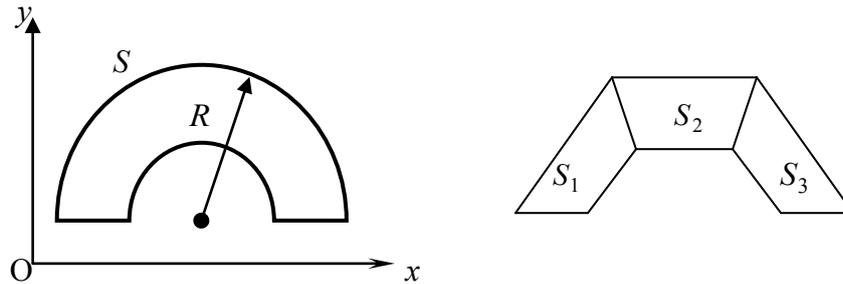


Рис. 8. Область S и ее разбиение на ДвКЭ S_e формы трапеции

Предлагаемые подходы аналогичным образом можно использовать при построении трехмерных МКЭ сложной формы (например, формы прямой призмы, в основании которой лежит трапеция, криволинейных МКЭ). В качестве крупных сеток в этом случае можно использовать узловые сетки известных трехмерных криволинейных КЭ и известные аппроксимирующие полиномы первого, второго и третьего порядка, которые построены для крупных сеток в декартовых системах координат [1, 2].

Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 9) шестигранный композитный ДвКЭ V_p первого порядка сложной формы, верхняя S_1 и нижняя S_2 грани (размерами $a \times a$, $b \times b$, $b > a$) которого параллельны, область $S_2 = b \times b$ лежит в плоскости Oxy , $a, b > h$, где h – толщина ДвКЭ V_p . Проекция области $S_1 = a \times a$ на плоскость Oxy находится в области S_2 , $S_1 \subset S_2$. Узлы крупной сетки V_H ДвКЭ V_p на рисунке 9 отмечены точками. Такие трехмерные ДвКЭ можно использовать при расчете конструкций оболочечного типа.

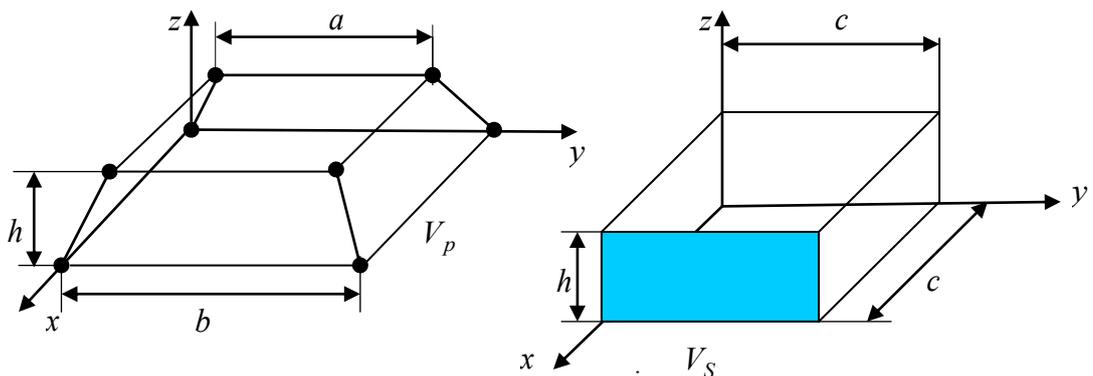


Рис. 9. Шестигранный ДвКЭ V_p и параллелепипед V_S

Область ДвКЭ V_p сложной формы приближенно представляем областью более простой формы – прямоугольным параллелепипедом V_S (см. рис. 9) размерами $c \times c \times h$, где значение c находим по формуле $c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$. Если $a \approx b$, $h < a, b$, то в этом случае нетрудно видеть, что объем ДвКЭ V_p приближенно равен объему параллелепипеда V_S , т.е. $V_p \approx V_S$. Если боковые грани ДвКЭ V_p криволинейные, то $c = \sqrt{(S_1 + S_2)/2}$, где $S_1 \approx S_2$; S_1, S_2 – площади верхней и нижней граней ДвКЭ V_p . Базовое разбиение ДвКЭ V_p строим на области V_S , которое порождает мелкую узловую сетку и учитывает компо-

зитную структуру. Используя аппроксимации перемещений базового разбиения и аппроксимации перемещений, построенные на крупной сетке V_H , по известной процедуре [3] определяем матрицу жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ V_p .

Литература

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
2. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977.
3. *Матвеев А.Д.* Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов / Институт вычислительного моделирования СО РАН. – Красноярск, 2000. – 30 с. Деп. в ВИНТИ № 2990-В00.
4. *Матвеев А.Д.* Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
5. *Матвеев А.Д.* Совместное применение одно- и двухсеточного моделирования для трехмерных упругих композитов сложной формы // Вестн. КрасГАУ. – 2005. – № 9. – С. 52–59.
6. *Матвеев А.Д.* Двухсеточное моделирование локально армированных трехмерных упругих тел // Вестн. КрасГАУ. – 2006. – №10. – С. 192–198.
7. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1970.
8. *Норри Д., де-Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981.

