МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 514.7

А.Г. Рогачевский, Т.Н. Логиновская, С.Ф. Яковлева

О ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ДИНАМИКИ ОРТОГОНАЛЬНО-КООРДИНАТНЫХ ПОЛЕЙ. ЧАСТЬ I. ЛАГРАНЖЕВА СКОРОСТЬ

Рассматриваются уравнения динамики, описывающие деформацию псевдоевклидова пространства типа (4,1). Предполагается, что скорость деформации является ортогонально-координатным полем, то есть полем базисного вектора ортогональной системы координат. Дана интерпретация постоянных, входящих в уравнения динамики.

***Ключевые слова**: лагранжева динамика, лагранжева скорость, ортогональные координаты, псевдоевклидово пространство, деформация пространства.*

A.G. Rogachevskiy, T.N. Loginovskaya, S.F. Yakovleva

ABOUT THE LAGRANGE FORMULATION OF THE ORTHOGONAL-COORDINATE FIELD DYNAMICS. PART I. LAGRANGE SPEED

The dynamic equations describing the deformation of pseudo-Euclidean space of type (4,1) are considered. It is assumed that the deformation speed is the orthogonal- coordinate field, i.e. the field of the basic vector of the orthogonal coordinate system. The interpretation of the constants that are included into the dynamic equation is given.

Key words: Lagrange dynamics, Lagrange speed, orthogonal coordinates, pseudo-Euclidean space, space deformation.

Введение. Изучение ортогонально-координатных (ОК) полей как особого объекта начато в [1]. В [2] была поставлена задача построения для таких полей лагранжевой механики второго порядка. Уточним постановку задачи (далее будут использоваться обозначения, принятые в [3, 4]).

Полная система уравнений классической электродинамики – это уравнения Максвелла и уравнение Лоренца-Минковского (УЛМ) для заряженных частиц, записанные в псевдоевклидовом пространстве R_1^4. При этом УЛМ является полевым уравнением первого порядка в частных производных для поля единичной скорости *V*

$$V`_{\omega} = \lambda F \bullet V . \tag{1}$$

После нахождения поля *V* может решаться задача нахождения траекторий частиц. Справа в (1) стоит свертка тензора электромагнитного поля *F* с единичной скоростью *V*; $\lambda = \rho / \mu c^2$, где ρ и μ – плотности электрического заряда и массы частиц [3]. В тензор *F* входит поле, порожденное частицами. Единичная скорость *V* определяется в случае одной частицы, движущейся по траектории L_V: $r = r(\omega)$, где ω – натуральный параметр; $V = dr / d\omega$. В случае системы одинаковых частиц в УЛМ (1) имеем $\rho / \mu = e / m$ и $\lambda = e / mc^2 = \mathrm{const}$. Далее рассматривается именно этот случай. Отметим другой вариант использования полевого УЛМ при $\lambda = \mathrm{const}$. В динамике одной частицы это уравнение будет определять возможные траектории, соответствующие различным начальным условиям, заданным на некоторой гиперповерхности.

Полная система уравнений электродинамики рассматривается в [3], при этом считается, что в каждой точке R_1^4 частицы имеют определенную скорость *V*. Требование однозначности поля *V* обсуждается в разделе 3 для случая одной частицы и ортогонально-координатного поля векторного потенциала.

Итак, при рассмотрении полной системы уравнений классической электродинамики примем следующие упрощающие предположения: частицы имеют одинаковый параметр e / m, векторный потенциал является ОК полем, значение скаляра $a(r) = |A|$ определяется полем $n(r)$ в силу калибровки Лоренца. В рамках этих предположений уточним общую постановку задачи: требуется построить векторное пространство, в котором $V`_t$ может интерпретироваться как скорость, а уравнения Максвелла (УМ) будут уравнениями второго порядка.

1. Траектории в пространстве $T_{s(3)}$

Рассмотрим образы траекторий L_A поля A на единичной 3-сфере S(3), погруженной в пространство типа (4, 1). Траектории L_A: $r = r(t)$ ОК поля $A(r)$ соответствует траектория L_n: $n = n(t)$ на S(3), где n – радиус-вектор точки на сфере и одновременно единичная нормаль к ней.

Уточним определение сферических координат на S(3). На сфере S(3) будут определены сферические (угловые координаты), если на ней будет задано поле.

В [2] были получены условия, при которых собственный репер ОК поля A однозначно индуцирует ортонормированный репер на S(3) и тем самым задает на этой сфере касательное расслоение $T_{s(3)}$. В результате на S(3) могут быть введены координаты, далее называемые угловыми.

Приведем необходимые формулы. Для ортонормированного репера $\eta \equiv \{\eta(\alpha)\}$ имеем

$$(n, \eta(\alpha)) = 0, \quad (\eta(\alpha), \eta(\beta)) = -\delta_{\alpha\beta}.$$

Координатные линии $n = n(\varphi(\alpha))$, соответствующие углу $\varphi(\alpha)$, определяются уравнениями $n`_{\varphi(\alpha)} = \eta(\alpha)$.

Разложим «скорость» $n`_t$ на траектории L_n в репере η

$$n`_t = -\sum_{\alpha=1}^{3}(n`_t, \eta(\alpha))\eta(\alpha). \tag{2}$$

Согласно [5], координаты - $(n`_t, \eta(\alpha))$ могут быть интерпретированы как угловые скорости $\varphi(\alpha)`_t$ на траектории $n = n(t)$ на S(3). В разделе 4 разложение (2) в $T_{s(3)}$ будет использовано для записи УМЛ через 3-мерные угловые скорости частиц.

2. Постановка задачи

Целью данной работы является анализ УЛМ на основе аналогии с анализом уравнений Максвелла, который привел к созданию аксиоматики СТО (Лоренц, Минковский). А именно – учтем следующие этапы анализа УМ:

1. Принятие калибровки Лоренца, упрощающее УМ.

2. Рассмотрение свободных полей, в случае которых решение УМ определяется уравнением характеристики волнового уравнения: $c^2\, dt^2 - dr^2 = 0$.

3. Применение такого понятия механики, как «скорость» для интерпретации постоянной c и интерпретации уравнения характеристики как уравнения равномерного движения.

4. Объявление левой части уравнения характеристики метрической квадратичной формой в 4-пространстве R_1^4 (основной постулат СТО как математической структуры).

Поставим задачу: по аналогии с пунктами 1–4 интерпретировать постоянную $\lambda = e / mc^2$, входящую в полевое УЛМ, как 3-скорость, то есть как вектор скорости в некотором 3-мерном векторном пространстве.

3. Динамика частицы в случае ортогонально-координатного внешнего поля

Используя выражение (П2), запишем УЛМ (1) в виде

$$V`_\omega = 2\lambda\, a\, (n \wedge n`_\omega), \tag{3}$$

где $a = (A, A)^{1/2}$.

Теорема

Если тензор F в правой части УЛМ (1) соответствует ОК полю, то поле скорости V голономно и имеет место равенство

$$dV = V \wedge V`_\omega, \tag{4}$$

где d – внешнее дифференцирование.

Доказательство

Раскрывая свертку в правой части (3), получаем, что $V`_{\omega}$ принадлежит плоскости $Z$ векторов $n$ и $n`_{\omega}$. Без ущерба для общности можно считать, что в начальный момент времени вектор V принадлежит плоскости Z. Тогда V будет принадлежать плоскости Z в любой момент времени, а из (3) будет следовать уравнение

$$V \wedge V`_{\omega} = - 2\lambda\ (ak_f)\ \ (n \wedge m), \tag{5}$$

где $k_f = - i\ (n`_{\omega}\ ,\ n`_{\omega})^{1/2}$ – мнимая кривизна траектории поля A, $m = n`_{\omega}\ /\ |k_f|$. Для доказательства следует (3) умножить слева на V, затем подставить в правую часть уравнения разложение $V = \alpha\ n + \beta\ m$ и учесть, что $(V, V) = \alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Учтем далее, что в качестве исходного пункта в механике частицы можно взять следующее полевое уравнение (динамический постулат или ДП) [1]

$$dP = (e/c)\ F\ , \tag{6}$$

где d – внешнее дифференцирование; $P = mc\ V$ – импульс частицы.

Из (5) и (6) следует (4). Тогда очевидно равенство $V \wedge dV = 0$, то есть поле V голономно. Доказательство окончено.

Приведем еще один вид УЛМ, следующий из (5)

$$V \wedge V`_{\omega} = 2\lambda\ \ (A \wedge A`_{\omega}). \tag{7}$$

Используя доказанную теорему, можно сформулировать условие однозначности поля V следующим образом: пусть голономному полю V соответствует ОК потенциал $\tilde{A} = \alpha\ V$ и пусть поле $\tilde{A}$ ортогонально-координатно (тогда $\tilde{A}$ – поле базисного вектора, то есть $\tilde{A}$ и V определены однозначно).

4. Свободное движение частицы в угловом пространстве

В этом разделе решается задача, поставленная в разделе 2. Пункты этого раздела соответствуют пунктам сформулированной там «программы».

1. УЛМ (5) *может быть* получено из ДП (6) при «упрощающем» предположении, что поле V голономно.

2, 3. Согласно введению и разделу 2, нужно задать векторное 3-пространство, в котором $V`_t$ определяет 3-скорость. Используя определенное в разделе 1 касательное расслоение $T_{s(3)}$ , получаем разложение $V`_t$ в репере η

$$V`_t = -\sum_{\alpha=1}^{3} (V`_t\,, \eta(\alpha))\eta(\alpha)\,. \tag{8}$$

То есть $V`_t$ определяет угловые скорости $\varphi(\alpha)`_t$ на траектории $n = n\ (t)$ на S(3); α = 1, 2, 3. Левая часть (5) принимает вид

$$V \wedge V`_t = -\sum_{\alpha=1}^{3} \phi(\alpha)`_t (V \wedge \eta(\alpha))\,.$$

Считая $\varphi(\alpha)`_t = - (V`_t, \eta(\alpha))$ «3-скоростью», определим «свободное» движение частицы с помощью уравнения (5). Пусть для «свободной» частицы свертка правой части (5) с собой дает постоянную. То есть постоянной должна быть величина ak_f. Полагая $ak_f = 1$, получаем аналог уравнения характеристики волнового уравнения

$$-\sum_{\alpha=1}^{3} (d\phi(\alpha))^2 + 4(e / mc^2)^2 dt^2 = 0\,.$$

Согласно этому выражению, постоянная $2e\ /\ mc^2$, входящая в УЛМ, имеет смысл трехмерной угловой скорости в касательном векторном пространстве $T_{s(3)}$.

4. Левая часть полученной формулы определяет квадратичную форму на векторах пространства Φ_1^4 с координатами {t, $\varphi(\alpha)$}.

Таким образом, выполнена программа, намеченная в разделе «Постановка задачи».

Приложение: ортогонально-координатные электромагнитные поля

Понятие ОК (ортогонально-координатного) потенциала было введено в [1]. Далее будут использоваться обозначения, принятые в [2, 3]. ОК-потенциал А, по определению, это векторное поле, являющееся времениподобным базисным вектором некоторой криволинейной системы координат в пространстве R_1^4. Базисные векторы системы координат, соответствующей A, обозначим $L(p)$, где p – номер вектора, то есть ковекторный индекс. Пусть $r = r(\sigma)$ – интегральные линии поля A, то есть $A = r`_\sigma$; где σ – соответствующая $A \equiv L(0)$ координата. Тогда

$$A = a^2\, \nabla f, \tag{П1}$$

где $a \equiv |A| = d\omega/d\sigma$; ω – натуральный параметр на А-линиях; $f(r)$ определяет координатные поверхности S(σ), которым ортогонален вектор A, а именно: S(σ): $f(r) = \sigma$. Из (П1) следует, что тензор электромагнитного поля является простым бивектором

$$F = 2\, \nabla a \wedge n,$$

где $n = A\, /\, a$ – единичный вектор, касательный к А-линиям и одновременно нормальный к поверхностям S(σ). Далее, так как $d\,(n/a) = 0$, где d – внешнее дифференцирование, то $\nabla a = a`_\omega\, n - n`_\sigma$. Отсюда следует, что

$$F = 2\, n \wedge n`_\sigma = 2\, a\, n \wedge n`_\omega\, . \tag{П2}$$

Литература

1. *Рогачевский А.Г.* О динамической трактовке деформаций пространства R_1^4 // Известия вузов. Физика. – Томск, 2003. – № 10. – С.53–55.
2. *Рогачевский А.Г.* О кинематике ортогонально-координатных электромагнитных полей // Математика, моделирование и оптимизация сложных систем и процессов, методические аспекты преподавания математики в высшей школе. – Красноярск: Изд-во СибГТУ, 2010. – Вып. 1 – С. 30–35.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие. Т.II. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
5. *Рогачевский А.Г.* Двумерная механика электромагнитного поля на плоских слоениях пространства R_1^4 // Вестник КрасГАУ. – 2008. – Вып. 3. – С. 61–64.
6. *Рогачевский А.Г.* О трехмерных уравнениях динамики ортогонально-координатных полей // Межвуз. сб. науч. тр. – Красноярск: Изд-во СибГТУ, 2011. – Вып. 2. – С. 20–23.