

### Литература

1. Гидротехнические сооружения /под ред. Н.П. Розанова. – М.: Стройиздат, 1978. – 646 с.
2. Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений/ под ред. Б.Т. Емцева. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 620 с.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – С. 180–330.
4. Богомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика. – М.: Стройиздат, 1972. – С. 320–342.
5. Рауз Х. Механика жидкости для инженеров-гидротехников. – М.; Л.: Тосэнергоиздат, 1958. – С. 337–361.
6. Стокер Дж. Волны на воде. – М., 1959.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – С. 447–448.



УДК 539.3

А.Д. Матвеев

#### ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ДВУХСЕТОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ТРЕХМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК\*

*Предложены процедуры построения граничных двухсеточных конечных элементов для расчета трехмерных композитных балок, имеющих сложный характер закрепления. Применение предлагаемых граничных элементов в дискретных двухсеточных моделях трехмерных балок приводит к уменьшению погрешности сеточных решений. При этом двухсеточные дискретные модели, включающие граничные элементы, имеют малую размерность.*

**Ключевые слова:** композиты, балки, упругость, двухсеточные конечные элементы, метод конечных элементов, граничные элементы.

A.D. Matveev

#### APPLICATION OF BOUNDARY DOUBLE-GRID ELEMENTS IN THE CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL COMPOSITE BEAMS

*Constructing boundary double-grid finite elements to calculate three-dimensional composite beams having the difficulty of fastening is shown. Application of the proposed boundary elements in discrete double-grid models of three-dimensional beams leads to the error reduction of mesh solutions. Moreover, discrete models including boundary elements have small dimensions.*

**Key words:** composites, beams, elasticity, double-grid finite elements, finite elements method, boundary elements.

---

**Введение.** Как показывают расчеты, решения, построенные для упругих трехмерных композитных балок по методу конечных элементов (МКЭ) [1, 2, 3] с применением двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) первого типа [4, 5], наибольшую погрешность имеют в окрестностях границ закрепления балок. Особенно большая погрешность решения возникает в случае сложного характера закрепления балки. Например, частичное закрепление балки по торцу. В связи с этим предлагается в окрестностях границ крепления балок использовать граничные ДвКЭ.

Краткая суть ДвКЭ  $V_p$  первого типа [4, 5] формы прямоугольного параллелепипеда состоит в следующем. Для построения ДвКЭ используем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Базовое разбиение ДвКЭ  $V_p$  состоит из конечных элементов (КЭ)  $V^h$  первого порядка формы куба [2], которое учитывает его неоднородную структуру по микроподходу [6] и порождает мелкую сетку. Отметим, что при построении КЭ  $V^h$

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00130).

используются уравнения трехмерной задачи упругости. На базовом разбиении ДвКЭ  $V_p$  определяем в матричной форме функционал полной потенциальной энергии, который зависит от узловых неизвестных мелкой сетки. На мелкой сетке определяем крупную сетку. С помощью аппроксимаций, построенных на крупной сетке, узловые неизвестные мелкой сетки в функционале потенциальной энергии ДвКЭ  $V_p$  выражаем через узловые неизвестные крупной сетки. В результате функционал потенциальной энергии ДвКЭ  $V_p$  представляется через узловые неизвестные крупной сетки. Минимизируя функционал энергии по узловым перемещениям крупной сетки, получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ  $V_p$  (первого типа).

В данной работе на базе ДвКЭ  $V_p$  первого типа разработана процедура построения граничных двухсеточных элементов для трехмерных композитных балок, имеющих сложный характер закрепления. Основные положения предлагаемой процедуры рассмотрим на примере граничного ДвКЭ  $V_e$  формы прямоугольного параллелепипеда. Область ДвКЭ  $V_e$  представляем двумя областями  $V_1, V_2$  формы прямоугольного параллелепипеда, причем  $V_1 \subset V_2$ , где  $V_e = V_1 + V_2$ ,  $V_e$  – область ДвКЭ. При этом область  $V_1$  имеет границу, совпадающую с границей крепления балки, область  $V_2$  не имеет закрепленных границ. Области  $V_1, V_2$  представляем базовым разбиением, состоящим из КЭ  $V^h$  первого порядка формы куба, которое учитывает неоднородную структуру ДвКЭ  $V_e$  и порождает мелкую сетку. На базовом разбиении ДвКЭ  $V_e$  определяем в матричной форме функционал полной потенциальной энергии. На мелкой сетке определяем крупную сетку. С помощью аппроксимаций, построенных на крупной сетке ДвКЭ  $V_e$ , узловые неизвестные мелкой сетки области  $V_2$  в функционале потенциальной энергии ДвКЭ  $V_e$  выражаем через узловые неизвестные крупной сетки. В результате функционал потенциальной энергии ДвКЭ  $V_e$  представляется через узловые неизвестные мелкой сетки области  $V_1$  и узловые неизвестные крупной сетки, не совпадающих с узлами мелкой сетки области  $V_1$ . Из условия минимизации функционала ДвКЭ  $V_e$  по узловым перемещениям крупной сетки и мелкой сетки области  $V_2$  получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил граничного ДвКЭ  $V_e$ .

**1. Процедура построения граничных двухсеточных конечных элементов.** Рассмотрим процедуру построения граничного ДвКЭ  $V_e$  неоднородной структуры формы прямоугольного параллелепипеда размерами  $a \times b \times c$ . На рис. 1  $a = 16h, b = 8h, c = 12h$ . Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши трехмерной задачи теории упругости [7]. Область  $V_e$  граничного ДвКЭ представляем двумя подобластями  $V_1$  и  $V_2$  формы прямоугольного параллелепипеда, причем  $V_1 \subset V_2$ , где  $V_e = V_1 + V_2$ . Область  $V_1$  имеет размеры  $3h \times 8h \times 12h$ , область  $V_2 - 13h \times 8h \times 12h$ , общая граница областей  $V_1, V_2$  на рис. 1 отмечена жирной линией. Пусть граница области  $V_1$  в плоскости  $yOz$  совпадает с границей балки (рис. 1). Области  $V_1, V_2$  ДвКЭ представляем базовым разбиением, которое состоит из однородных КЭ  $V^h$  первого порядка формы куба со стороной  $h$ . Данное разбиение учитывает неоднородную структуру ДвКЭ  $V_e$  и порождает мелкую сетку с шагом  $h$  (размерности  $m_1 \times m_2 \times m_3$ ). Для рис. 1 имеем  $m_1 = 17, m_2 = 9, m_3 = 13$ . На мелкой сетке определяем крупную трехмерную сетку размерности  $n_1 \times n_2 \times n_3$  с шагами:  $H_1$  – по оси  $Ox, H_2$  – по оси  $Oy, H_3$  – по оси  $Oz$ , причем  $H_1 = k_1h, H_2 = k_2h, H_3 = k_3h$ , где  $k_1, k_2, k_3$  – целые,  $k_1, k_2, k_3 \geq 2$ . На рис. 1 узлы крупной сетки отмечены точками;  $H_1 = 4h, H_2 = 2h, H_3 = 12h, n_1 = n_2 = n_3 = 5, k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 3$ .

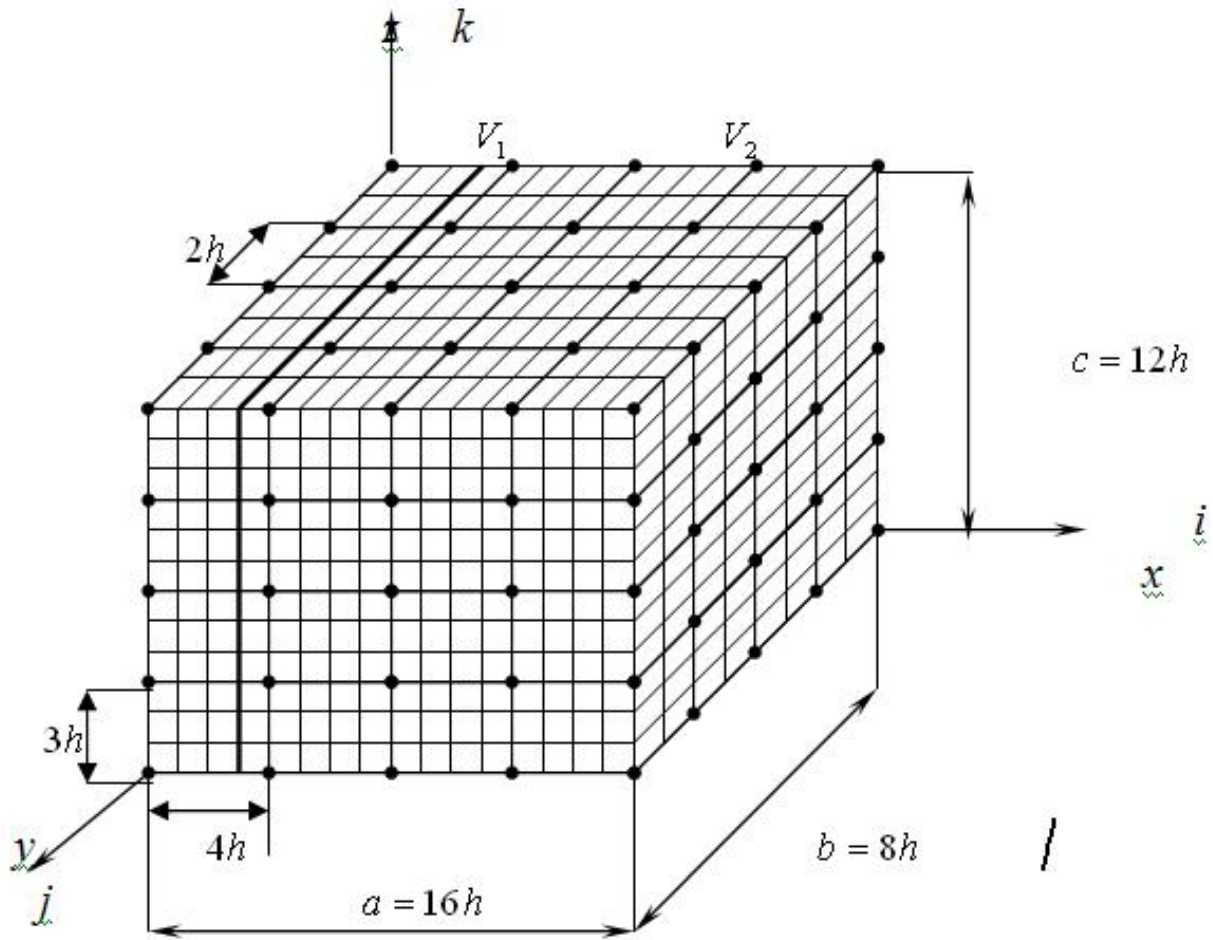


Рис. 1. Мелкая и крупная сетки ДвКЭ  $V_e$

Полную потенциальную энергию  $\Pi_e$  ДвКЭ  $V_e$  представим в виде

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T [K_e] \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \mathbf{P}_e, \quad (1)$$

где  $[K_e]$  – матрица жесткости;  $\mathbf{P}_e, \mathbf{q}_e$  – векторы узловых сил и неизвестных базового разбиения ДвКЭ  $V_e$ ,

$$\mathbf{q}_e = \{\mathbf{q}_e^1, \mathbf{q}_e^2\}^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{q}_e^1$  – вектор узловых неизвестных мелкой сетки области  $V_1$  (включая узлы общей границы  $S_{12}$  областей  $V_1, V_2$ );  $\mathbf{q}_e^2$  – вектор узловых неизвестных области  $V_2$  (без учета узлов на общей границе  $S_{12}$ );  $T$  – транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [3] на крупной сетке определяем аппроксимирующие функции для перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ДвКЭ, которые соответственно обозначим через  $u_H$ ,  $v_H$ ,  $w_H$  и представим в форме

$$u_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_H = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk}, \quad (3)$$

где  $u_{ijk}$ ,  $v_{ijk}$ ,  $w_{ijk}$  – искомые значения функций  $u_H$ ,  $v_H$ ,  $w_H$  в узле  $\rho(i, j, k)$  крупной сетки;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , введенной для узлов крупной сетки (рис. 1);  $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$  – базисная функция узла  $\rho(i, j, k)$  крупной сетки, где  $i = 1, \dots, n_1$ ,  $j = 1, \dots, n_2$ ,  $k = 1, \dots, n_3$ ,  $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ ,

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^{n_1} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^{n_2} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^{n_3} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (4)$$

$x_i, y_j, z_k$  – координаты узла  $\rho(i, j, k)$  крупной сетки в декартовой системе координат  $Oxuz$ .

Целым числам  $i, j, k$  узла  $\rho(i, j, k)$  крупной сетки определим целое число  $\beta$  и введем обозначения:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $q_\beta^u = u_{ijk}$ ,  $q_\beta^v = v_{ijk}$ ,  $q_\beta^w = w_{ijk}$ , где  $\beta = 1, \dots, n_0$ ;  $n_0 = n_1 n_2 n_3$ . Тогда выражения (3) примут вид:

$$u_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^u, \quad v_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^v, \quad w_H = \sum_{\beta=1}^{n_0} N_\beta q_\beta^w. \quad (5)$$

Обозначим через  $\mathbf{q}_H = \{q_1^u, \dots, q_{n_0}^u, q_1^v, \dots, q_{n_0}^v, q_1^w, \dots, q_{n_0}^w\}^T$  вектор узловых параметров МКЭ крупной сетки, т. е. вектор узловых неизвестных ДвКЭ. Используя (4), компоненты вектора  $\mathbf{q}_e^2$  узловых неизвестных области  $V_2$  выражаем через компоненты вектора  $\mathbf{q}_H$ , в результате получим равенство:

$$\mathbf{q}_e^2 = [A_e^2] \mathbf{q}_H, \quad (6)$$

где  $[A_e^2]$  – прямоугольная матрица.

Используя (6), выражение (2) представим в форме:

$$\mathbf{q}_e = [B_e] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_e^1 \\ \mathbf{q}_e^2 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где

$$[B_e] = \begin{bmatrix} [E_e^1] & 0 \\ 0 & [A_e^2] \end{bmatrix},$$

$[E_e^1]$  – квадратная единичная матрица.

Используя (7), (2) в представлении (1), из условия  $\partial \Pi_e / \partial (\{\mathbf{q}_e^1, \mathbf{q}_e^2\}^T) = 0$  получаем уравнение  $[K_H^c] \{\mathbf{q}_e^1, \mathbf{q}_e^2\}^T = \mathbf{F}_H^c$ ,

где  $[K_H^c] = [B_e]^T [K_e] [B_e]$ ,  $\mathbf{F}_H^c = [B_e]^T \mathbf{P}_e$ . (8)

$[K_H^c], \mathbf{F}_H^c$  – матрица жесткости и вектор узловых сил граничного ДвКЭ  $V_e$  формы прямоугольной призмы.

*Замечание 1.* Решение, построенное для крупной сетки граничного ДвКЭ, с помощью формулы (6) проецируем на мелкую сетку базового разбиения ДвКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ базового разбиения граничного ДвКЭ, следовательно, определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры граничного элемента.

*Замечание 2.* Погрешность решения зависит от соотношения шагов мелкой и крупной сеток и от размеров областей  $V_1, V_2$  граничных ДвКЭ  $V_e$  (рис. 1). Как показывают расчеты, увеличение области  $V_1$  (которая соприкасается с границей закрепления балки (рис. 1) приводит к уменьшению погрешности решения.

### Достоинства двухсеточных конечных элементов

- ДвКЭ (граничные и первого типа) описывают трехмерное напряженное состояние в композитных балках.
- С помощью базовых разбиений ДвКЭ (граничных и первого типа) учитывается неоднородная структура композитных балок.
- ДвКЭ (граничные и первого типа) порождают двухсеточные дискретные модели балок, размерности которых меньше размерностей базовых моделей.
- ДвКЭ (граничные и первого типа) порождают решения, которые отличаются от решений, отвечающих базовым моделям балок, на заданную величину.
- С помощью варьирования соотношений шагов мелкой и крупной вложенных сеток ДвКЭ первого типа, для граничных ДвКЭ – варьирование размерами областей  $V_1$  (рис. 1) регулирует погрешность решений, построенных для двухсеточных дискретных моделей балок.
- Напряжения могут быть определены в любом компоненте неоднородной структуры ДвКЭ (граничных и первого типа).
- Процедуры построения ДвКЭ (граничных и первого типа) для балок базируется на известных алгоритмах МКЭ и поэтому удобно реализуются на ЭВМ. Реализация МКЭ для двухсеточных дискретных моделей балок требует меньше ресурсов ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

**2. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим в декартовой системе координат  $Oxyz$  модельную трехмерную задачу теории упругости для композитной балки  $V_0$  (рис. 2). Балка  $V_0$  длиной  $L$  прямоугольного сечения высотой  $H$  и шириной  $d$  имеет сложное закрепление (рис. 2),  $L = 128h$ ,  $H = 12h$ ,  $d = 8h$ ,  $h = 0,5$ . По левому торцу балка  $V_0$  частично закреплена, при  $x = 0$ ,  $0 \leq z \leq 6h$  имеем  $u = v = w = 0$ . Граница крепления на рис. 2 показана штриховкой. Балка армирована непрерывными продольными волокнами с поперечным сечением  $2h \times 2h$ . На рис. 3 показано поперечное сечение балки  $V_0$ , сечения волокон закрашены. Расстояние между волокнами по осям  $Ox$ ,  $Oz$  равно  $2h$ .

Базовая дискретная модель  $R_0$  балки  $V_0$ , состоящая из однородных КЭ первого порядка формы куба со стороной  $h$  [2], учитывает неоднородную структуру, сложное закрепление и порождает мелкую сетку  $V^h$ . Балка нагружена сосредоточенными вертикальными силами  $q = 0,01$  (векторы сосредоточенных сил параллельны оси  $Oz$ , схема нагружения показана на рис. 2), которые приложены в узлах мелкой сетки  $V^h$  с координатами  $x_i, y_j, z = 12h$ , где  $x_i = 32h + 4h(i - 1)$ ,  $y_j = 6h + 2h(j - 1)$ ,  $i = 1, \dots, 24$ ,  $j = 1, 2$ .

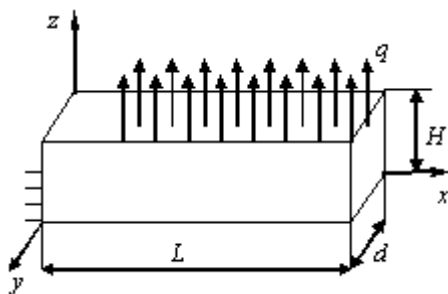


Рис. 2. Расчетная схема балки  $V_0$

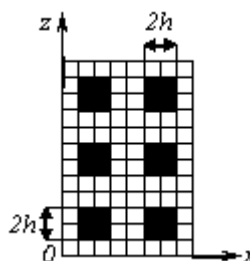


Рис. 3. Сечение балки  $V_0$

Модуль Юнга волокон балки равен 1, связующего материала 10, коэффициент Пуассона для всей области балки равен 0,3. Двухсеточная дискретная модель  $R_1$  балки  $V_0$  состоит из семи ДвКЭ  $V_p$  первого типа размерами  $16h \times 8h \times 12h$  и одного граничного ДвКЭ  $V_e$  (область  $V_1$  имеет размеры  $2h \times 8h \times 12h$ , область  $V_2 - 14h \times 8h \times 12h$  (см. рис. 1), которые имеют одинаковые мелкие и крупные сетки. Двухсеточная дискретная модель  $R_2$  балки  $V_0$  состоит только из восьми ДвКЭ  $V_p$  (первого типа).

Анализ результатов расчетов показывает следующее. Максимальное значение перемещений  $w_1 = 142,528$  (в направлении оси  $Oz$ ) двухсеточной дискретной модели  $R_1$  балки  $V_0$  (т.е. с применением граничного элемента  $V_e$ ) отличается от перемещений  $w_0 = 152,782$  базовой модели  $R_0$  балки на 6,71 %, максимальное перемещение  $w_2 = 122,063$  дискретной модели  $R_2$  (без применения граничного элемента  $V_e$ ) – на 20,1 %. Максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_1 = 4,177$  дискретной модели  $R_1$  и  $\sigma_0 = 4,439$  базовой модели  $R_0$  балки отличаются на 5,9 %. Эквивалентные напряжения вычисляем в центрах тяжести КЭ первого порядка формы куба со стороной  $h$  по четвертой теории прочности. Максимальное эквивалентное напряжение  $\sigma_2 = 3,222$  дискретной модели  $R_2$  балки  $V_0$  отличается от напряжения  $\sigma_0$  на 27,41 %. Базовая модель  $R_0$  балки  $V_0$  содержит 45090 узловых неизвестных, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 396. Двухсеточная дискретная модель  $R_1$  балки  $V_0$  имеет 3264 неизвестных, ширина ленты СУ МКЭ равна 1164, т.е. лента СУ МКЭ модели  $R_1$  занимает в 4,7 раза меньше объема памяти ЭВМ, чем лента СУ МКЭ базовой модели  $R_0$ . Отметим, что использование граничных ДвКЭ приводит к несущественному увеличению размерности дискретной модели балки. В данном примере двухсеточная дискретная модель  $R_2$  (без применения граничного ДвКЭ  $V_e$ ) балки  $V_0$  имеет 2430 неизвестных, т.е. модель  $R_2$  имеет в 1,34 раза меньше неизвестных, чем двухсеточная дискретная модель  $R_1$  балки  $V_0$  с применением граничного ДвКЭ  $V_e$ .

**Заключение.** На основании проведенных расчетов для трехмерной композитной балки  $V_0$  можно сделать следующие выводы. Применение граничного ДвКЭ  $V_e$  в двухсеточной дискретной модели балки  $V_0$  (рис. 2) приводит к трехкратному уменьшению погрешности для максимального перемещения и почти к пятикратному уменьшению погрешности для максимального эквивалентного напряжения. При этом реализация МКЭ для двухсеточной дискретной модели  $R_1$  балки  $V_0$  (с применением граничного ДвКЭ  $V_e$ ) требует меньше ресурсов ЭВМ, чем для базовой модели.

### Литература

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975.
2. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984.
3. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981.
4. *Матвеев А.Д.* Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов: деп. в ВИНТИ. – М., 2000. – № 2990-В00. – 30 с.
5. *Матвеев А.Д.* Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // ПМТФ. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
6. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982.
7. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.

