ИНФОРМАТИКА

УДК 517.518.87

К.А. Кириллов

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВАХ H_α КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА

На пространствах H_α получена верхняя оценка нормы функционала погрешности квадратурных формул, обладающих d-свойством Хаара.

Ключевые слова: *d-свойство Хаара, пространства функций H_α, функционал погрешности квадратурной формулы.*

K.A. Kirillov

ON THE NORM ASSESSMENT OF THE ERROR FUNCTIONALIN H_αSPACES OF QUADRATURE FORMULAS EXACT FOR HAAR POLYNOMIALS

On the $H_\alpha$spaces the upper norm assessment of the error functional of quadrature formulas possessing the Haar’s d-propertyis obtained.

Key words: Haar’s d-property, H_α function spaces, error functional of quadrature formula.

Введение. Задача построения и исследования кубатурных (квадратурных) формул, точных на некотором конечномерном классе функций, характеризует одно из важных направлений теории приближенного интегрирования. Ранее эта задача в основном решалась для вычисления интегралов, точных на алгебраических и тригонометрических многочленах. Кубатурные формулы, точные для конечных сумм Хаара, можно найти в [1]. Минимальные весовые квадратурные формулы, обладающие d-свойством Хаара (формулы, точные для полиномов Хаара степеней, не превосходящих заданного числа d), были описаны в [2, 3]. Исследование погрешности обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул проводилось на пространствах S_p. Оценки нормы функционала погрешности указанных формул в случае весовой функции $g(x) \equiv 1$ получены в [4−6], в случае весовой функции $g(x) \neq 1$ − в [7−9].

В настоящей работе получена верхняя оценка нормы функционала погрешности $\delta_N[f]$ обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул с N узлами на пространствах H_α

$$\left\|\delta_N\right\|_{H_\alpha^*} \le 2^{-\alpha d-1}(2^\alpha-1)^{-1}.$$

Как и для исследованных в [1] формул с $N = 2^d$ узлами, образующими Π_τ-сетки, для обладающих d-свойством Хаара квадратурных формул с наименьшим возможным числом узлов ($N = 2^{d-1}$) величина $\left\|\delta_N\right\|_{H_\alpha^*}$ удовлетворяет асимптотическое равенство $\left\|\delta_N\right\|_{H_\alpha^*} = O(N^{-\alpha})$, $N \to \infty$. В то же время обладающие d-свойством Хаара квадратурные формулы с $N = 2^{d-1}$ узлами, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

1. Основные определения

В настоящей работе используется оригинальное определение функций Хаара, введенное в [10], отличное от определения этих функций из [1].

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}, j/2^{m-1}$ ($m = 1,2,\ldots,\ j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$). Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1, – замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l_{m,j}^{-}$ и $l_{m,j}^{+}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^{-}, \\ -2^{(m-1)/2} & \text{при } x \in l_{m,j}^{+}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ 0{,}5\left[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)\right], & \text{если } x - \text{внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,} \end{cases}$$

где $\overline{l_{m,j}} = [(j-1)/2^{m-1}, j/2^{m-1}]$, $m = 1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,1}(x) \equiv 1$, которая образует нулевую группу.

Полиномами Хаара степени d назовем линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{0,1}(x)$, $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1,2,\ldots,d$, $j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$, такие, что хотя бы один из коэффициентов при функциях Хаара $\chi_{d,j}(x)$ группы номер d отличен от нуля.

Будем рассматривать квадратурные формулы

$$I[f] = \int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}) = Q[f], \tag{1}$$

где $x^{(i)} \in [0,1]$ – узлы формулы (1); C_i – коэффициенты при ее узлах (вещественные числа), $i = 1,2,\ldots,N$.

Будем говорить, что формула (1) обладает d-свойством Хаара, или просто d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x)$ степени, не превосходящей d, т. е. $Q[P] = I[P]$.

Сформулируем определения классов функций одной переменной $H_\alpha(L)$ и $S_p(A)$, приведенные в [1]. Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке [0, 1] и удовлетворяющих неравенству $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$ для любых $x, y \in [0,1]$ ($0 < \alpha \le 1$, $L > 0$), называют классом $H_\alpha(L)$. Константа L носит название определяющей постоянной этого класса. В [1] показано, что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $H_\alpha(L)$ (со всевозможными значениями L, значение α фиксировано), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле

$$\|f\|_{H_\alpha} = \sup_{x,x+t\in[0,1]} |f(x+t) - f(x)||t|^{-\alpha}.$$

Указанное линейное нормированное пространство обозначается через H_α, при этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, рассматриваются как одна функция.

Множество функций $f(x)$, определенных на отрезке [0, 1] и представимых в виде ряда Фурье-Хаара

$$f(x) = c_{0,1} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j}\, \chi_{m,j}(x) \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами $c_{0,1}$, $c_{m,j}$ ($m = 1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,2^{m-1}$), удовлетворяющими условию

$$A_p(f)=\sum_{m=1}^{\infty}2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|c_{m,j}\right|^p\right]^{1/p}\le A \tag{3}$$

($1\le p<\infty$, A – вещественная константа), определяется как класс $S_p(A)$. В [1] доказано, что множество функций $f(x)$, принадлежащих всем классам $S_p(A)$ (со всевозможными A, значение p фиксировано), является линейным пространством, на котором норма вводится по формуле $\|f\|_{S_p}=A_p(f)$. Указанное линейное нормированное пространство обозначается через S_p, при этом все функции $f(x)$, отличающиеся постоянными слагаемыми, рассматриваются как одна функция.

2. Вывод оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул

Обозначим через $\delta_N[f]$ функционал погрешности кубатурной формулы (1)

$$\delta_N[f]=I[f]-Q[f]=\int_0^1 f(x)dx-\sum_{i=1}^{N}C_i f(x^{(i)}). \tag{4}$$

Лемма 1. Если функция $f\in S_p$ ($p>1$), то для модуля функционала погрешности квадратурной формулы (1) имеет место неравенство

$$\left|\delta_N[f]\right|\le\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|c_{m,j}\right|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|Q[\chi_{m,j}]\right|^q\right]^{1/q}, \tag{5}$$

где числа p и q связаны соотношением $1/p+1/q=1$.

Доказательство. В [1] доказано, что если $f\in S_p$, то ряд (2) сходится абсолютно и равномерно. Подставим его в выражение (4) для $\delta_N[f]$. В соответствии с определением коэффициентов Фурье-Хаара [1] имеем

$$c_{0,1}=\int_0^1 f(x)dx. \tag{6}$$

Учитывая (6), получим

$$\left|\delta_N[f]\right|=\left|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}c_{m,j}Q[\chi_{m,j}]\right|. \tag{7}$$

Применяя к выражению (7) для $\left|\delta_N[f]\right|$ неравенства треугольника и Гельдера, приходим к соотношению (5). Лемма доказана.

Введем обозначение

$$\Sigma_q(m)=2^{-(m-2)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|Q[\chi_{m,j}]\right|^q\right]^{1/q},\quad m=1,2,\ldots,\quad q>1. \tag{8}$$

Лемма 2 [4]. Если квадратурная формула (1) обладает d-свойством, то

$$\sup_{m\ge1}\Sigma_q(m)\le\left(2^d\right)^{-1/p}. \tag{9}$$

Лемма 3 [1]. Для коэффициентов Фурье-Хаара суммируемой функции $f(x)$ класса $H_\alpha(L)$ имеют место неравенства

$$\left|c_{m,j}\right| \le 2^{-m(\alpha+1/2)-1/2} L\,,\ m=1,2,\ldots,\quad j=1,2,\ldots,2^{m-1}. \tag{10}$$

Лемма 4 [1]. Если $\alpha p > 1$, то $H_\alpha(L) \subset S_p(A)$ при $A = 0{,}5L\big/(2^\alpha - 2^{1/p})$.

Лемма 5 [1]. Для функции $f(x)$ класса $H_\alpha(L)$ $\|f\|_{H_\alpha} \le L$. Если для $f(x)$ выбрать наименьшую возможную определяющую постоянную L, то $\|f\|_{H_\alpha} = L$.

Теорема. Если функция $f \in H_\alpha$, то для нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1), обладающей d-свойством, имеет место оценка

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \le 2^{-\alpha d-1}(2^\alpha - 1)^{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $p > \alpha^{-1}$, L – определяющая постоянная одного из классов $H_\alpha(L)$, содержащих функцию $f(x)$. Тогда в соответствии с леммой 4 $f \in S_p(A)$, где $A = 0{,}5L\big/(2^\alpha - 2^{1/p})$.

Рассмотрим неравенство (5). Так как квадратурная формула (1) точна на функциях Хаара, номера групп которых не превосходят d, то это неравенство с учетом (8) можно переписать в следующем виде:

$$\left|\delta_N[f]\right| \le \sum_{m>d}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|c_{m,j}\right|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|Q[\chi_{m,j}]\right|^q\right]^{1/q} \le \sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|c_{m,j}\right|^p\right]^{1/p} \sup_{m>d}\Sigma_q(m). \tag{12}$$

В силу (10) имеем

$$\begin{gathered}\sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\left|c_{m,j}\right|^p\right]^{1/p} \le \sum_{m>d} 2^{(m-1)/2}\left[2^{m-1}\left(2^{-m(\alpha+1/2)-1/2}L\right)^p\right]^{1/p} = \\ = 2^{-1-1/p} L \sum_{m>d} 2^{-m(\alpha-1/p)} = 2^{-d(\alpha-1/p)} L\left(2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p}\right)^{-1}\end{gathered}. \tag{13}$$

Из неравенства (12) с учетом (9) и (13) получаем

$$\left|\delta_N[f]\right| \le 2^{-d(\alpha-1/p)} L\left(2^d\right)^{-1/p}\left(2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p}\right)^{-1} = 2^{-\alpha d-1} L\left(2^\alpha - 2^{1/p}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\left|\delta_N[f]\right| \le 2^{-\alpha d-1} L\left(2^\alpha - 1\right)^{-1}, \tag{14}$$

поскольку выражение в правой части (14) имеет вид $\inf\limits_{p>1/\alpha}\left\{2^{-\alpha d-1} L\left(2^\alpha - 2^{1/p}\right)^{-1}\right\}$.

Выберем в качестве L наименьшую возможную определяющую постоянную для $f(x)$. В соответствии с леммой 5 из (14) получим

$$\left|\delta_N[f]\right| \le 2^{-\alpha d-1}\left(2^\alpha - 1\right)^{-1}\|f\|_{H_\alpha},$$

откуда следует неравенство (11). Теорема доказана.

Замечание. В [2] описаны обладающие d-свойством минимальные весовые квадратурные формулы

$$\int_0^1 g(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x^{(i)}), \quad (15)$$

т. е. формулы с наименьшим возможным числом узлов среди всех квадратурных формул вида (17), обладающих d-свойством. Доказано, что в случае весовой функции $g(x) \equiv 1$ минимальная формула, обладающая d-свойством (при фиксированном d), единственна: число ее узлов $N = 2^{d-1}$, узлы этой формулы $x^{(i)} = (2i-1)/2^d$, коэффициенты при узлах $C_i = 2^{-d+1}$, $i = 1,2,\ldots,N$. Указанная квадратурная формула имеет вид (1), и для нормы ее функционала погрешности неравенство (11) записывается следующим образом: $\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} \le 2^{-\alpha-1}(2^\alpha - 1)^{-1} N^{-\alpha}$. Отсюда получаем, что для рассматриваемой формулы

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha^*} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty. \quad (16)$$

3. Заключение

В [1] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \quad (17)$$

с 2^d узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \in [0,1]^n$, образующими Π_τ-сетки ($0 \le \tau < d$), и доказано, что эти формулы точны на полиномах Хаара степеней $s \le d - \tau$, т. е. обладают $(d-\tau)$-свойством. Для нормы функционала погрешности таких формул на пространствах H_α доказано асимптотическое равенство, которое в одномерном случае принимает вид (16).

Таким образом, обладающие d-свойством минимальные квадратурные формулы вида (1) (см. замечание) имеют тот же порядок сходимости нормы функционала погрешности $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$, что и формулы (17) в одномерном случае. В то же время рассмотренные в замечании квадратурные формулы, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \to \infty$.

Литература

1. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. *Кириллов К.А., Носков М.В.* Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – № 6. – С. 791–799.
3. *Noskov M.V., Kirillov K.A.* Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials // J. of Approximation Theory. – 2010. – Vol. 162. – Issue 3. – P. 615–627.
4. *Кириллов К.А.* Об оценках погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12. – С. 330–337.
5. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. – 2011. – Т. 4. – № 4. – С. 479–488.
6. *Кириллов К.А.* Оценки на пространствах S_p нормы функционала погрешности квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Журн. вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52. – № 10. – С. 1747–1755.
7. *Кириллов К.А.* Об оценке погрешности минимальных весовых квадратурных формул, точных для функций Хаара // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11 (спец. вып.). – С. 44–50.
8. *Кириллов К.А.* Оценки нормы функционала погрешности на пространствах S_p весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 324–331.
9. *Кириллов К.А.* Об оценке нормы функционала погрешности на пространствах S_p весовых квадратурных формул, точных для полиномов Хаара // Вестн. КрасГАУ. – 2013. – № 7. – С. 30–36.
10. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. – 1910. – Vol. 69. – P. 331–371.