ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

А.А. Городов, О.В. Демьяненко

СВОЙСТВА ПРОГНОЗОВ В МОДЕЛЯХ АВТОРЕГРЕССИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе приведены результаты анализа свойств прогнозов в авторегрессии четвертого порядка. Даны рекомендации по выявлению общих свойств авторегрессионных моделей. Результаты исследований имеют важное значение и будут полезны при моделировании случайных процессов с помощью авторегрессии.

***Ключевые слова**: авторегрессия, моделирование, прогнозирование, ряд Квадробоначчи.*

*A.A. Gorodov, **O**.V. Demianenko*

FORECAST PROPERTIES IN AUTOREGRESSIVE MODELS OF THE FOURTH ORDER

The analysis results on the forecast properties in the autoregressions of the fourth order are presented in the article. The recommendations on the identification of the autoregressive modelcommon properties are given. The research results have important significance and will be useful in the random process modeling with the autoregression use.

Key words: autoregression, modeling, forecasting, Quadrobonacci line.

Введение. Теория моделирования процессов и их прогнозирования всегда интересовала ученых и многих аналитиков. Сам процесс моделирования состоит из нескольких этапов – это определение основных показателей исследуемого процесса, выделение числовых характеристик, оценка существенных показателей, отвлечение от неглавных характеристик и построение самой модели, с помощью которой возможно дать количественную оценку развития явления в будущем. Данным областям теоретических и практических исследований посвящены работы многих ученых экономистов и математиков, таких как Колмогоров, Гаус, Канторович, Элиот, Браун, Хольт и др. При этом многие работы исходят из определения, что процессы самовоспроизводящиеся [1–2].

С использованием данного принципа часто строятся модели авторегрессии. В ряде случаев эти модели построены на фрактальной теории. Теория введения моделей авторегрессии нашла широкое применение в трудах американских аналитиков, таких как Альмон, Браун, Хольт и др., после доказанных теорем Гауса (стационарность авторегрессионных процессов и предпосылки МЧР).

При этом широко развита методология подбора весовых коэффициентов авторегрессии, которая чаще всего упирается в предпосылки метода наименьших квадратов (МНК) и метода максимального правдоподобия (ММП), т.е. наличия у авторегрессионного процесса белого, или так называемого гаусовского шума. Рядом аналитиков предложены и другие способы подбора параметров, например: наивный – «на глаз» (модель Брауна), или аналитический с использованием числовых (МЧР Городова [3]).

Теория фракталов предполагает процесс полного самоподобия как отдельно взятых частей, так и организма в целом каждой из своих частей. При этом здесь широко используется понятие «золотого сечения» или понятие самоподобия мира через золотую пропорцию. В частности, аналитик Элиот еще в 1961 году предположил, что для прогнозирования ряда экономических процессов можно использовать золотую пропорцию и методы Фибоначчи. В дальнейшем данная теория была развита для прогнозирования индексов на биржах и получила название в честь основателя «Волны Элиота».

На самом деле вышеозначенные теории очень близки по своему содержанию. Так, например, в работах [4–5] доказана взаимосвязь прогнозов по авторегрессии с «золотым сечением», треугольником

Паскаля и числами Фибоначчи. Доказанные утверждения свидетельствуют о том, что прогноз автокорреляционных моделей при определенных условиях имеет распределение через «золотое сечение». Помимо этого, работы [4–5] определили отдельное направление исследований в области моделирования экономических процессов авторегрессионными методами с использованием теории числовых рядов. Одним из направлений данного исследования стало решение вопроса о распределении прогноза в моделях авторегрессии более третьего порядка, а также возможности расширения области применения авторегрессионных моделей с методом подбора параметров на основе числовых рядов не только при прогнозировании, но и при моделировании качественных характеристик исследуемых моделей.

Обозначенные выше проблемы предопределили **цель данной работы**: выделить и обобщить свойства прогнозов в модели авторегрессии 4-го порядка.

Описание метода

В работе [3] был предложен метод подбора параметров, основанный на использовании нормированных числовых рядов, в AR(p) моделях. Сделан сравнительный анализ результатов моделирования временных рядов данного метода с другими известными.

Прогнозное значение y_{t+1} вычисляются следующим образом:

$$y_{t+1}^{(m;p)} = \sum_{i=0}^{p-1} b_i^{(m;p)} x_{t-i+1}\,, \tag{1}$$

где m – номер нормированного числового ряда из некоторой базы рядов, обладающих вышеуказанными свойствами; p – порядок модели, верхний индекс $(m;\, p)$ – указывает на номер ряда и на порядок модели.

Авторегрессия 4-го порядка

Распишем прогноз при использовании четырех предшествующих членов динамического ряда

$$y_{t+1} = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + b_3 x_{t-3}.$$

Предположение 1. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 < b_i < 1$, т.е. $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = b_0 + b_0^2 + b_0^3 \cdots$.

Используя предложение (1), получим

$$y_{t+1} = b_0 x_t + b_0^2 x_{t-1} + b_0^3 x_{t-2} + b_0^4 x_{t-3}.$$

Прогноз на второе значение будет

$$y_{t+2} = b_0 y_{t+1} + b_0^2 x_t + b_0^3 x_{t-1} + b_0^4 x_{t-2} = b_0^2 x_t + b_0^3 x_{t-1} + b_0^4 x_{t-2} + b_0^5 x_{t-3} + b_0^2 x_t + b_0^3 x_{t-1} + b_0^4 x_{t-2} =$$
$$= 2b_0^2 x_t + 2b_0^3 x_{t-1} + 2b_0^4 x_{t-2} + b_0^5 x_{t-3}.$$

Аналогично на последующие значения:

$$y_{t+3} = b_0 y_{t+2} + b_0^2 y_{t+1} + b_0^3 x_t + b_0^4 x_{t-1} =$$
$$= 2b_0^3 x_t + 2b_0^4 x_{t-1} + 2b_0^5 x_{t-2} + b_0^6 x_{t-3} + b_0^3 x_t + b_0^4 x_{t-1} + b_0^5 x_{t-2} + b_0^6 x_{t-3} + b_0^3 x_t + b_0^4 x_{t-1} =$$
$$= 4b_0^3 x_t + 4b_0^4 x_{t-1} + 3b_0^5 x_{t-2} + 2b_0^6 x_{t-3},$$

$$y_{t+4} = b_0 y_{t+3} + b_0^2 y_{t+2} + b_0^3 y_{t+1} + b_0^4 x_{t-1} = 8b_0^4 x_t + 7b_0^5 x_{t-1} + 6b_0^6 x_{t-2} + 4b_0^7 x_{t-3},$$

$$y_{t+5} = b_0 y_{t+4} + b_0^2 y_{t+3} + b_0^3 y_{t+2} + b_0^4 y_{t+1} = 15b_0^5 x_t + 14b_0^6 x_{t-1} + 12b_0^7 x_{t-2} + 8b_0^8 x_{t-3},$$

$$y_{t+6} = b_0 y_{t+5} + b_0^2 y_{t+4} + b_0^3 y_{t+3} + b_0^4 y_{t+2} = 29b_0^6 x_t + 27b_0^7 x_{t-1} + 23b_0^8 x_{t-2} + 15b_0^9 x_{t-3},$$

$$\vdots$$

$$y_{t+k} = \alpha_1(k) x_t + \alpha_2(k) x_{t-1} + \alpha_3(k) x_{t-2} + \alpha_4(k) x_{t-3}.$$

Некоторые свойства прогнозов

Восстановим ряд коэффициентов $\alpha_1(k)$ при x_t:

$$\alpha_1(1) = b_0,$$
$$\alpha_1(2) = 2b_0^2,$$
$$\alpha_1(3) = 4b_0^3,$$
$$\alpha_1(4) = 8b_0^4,$$
$$\alpha_1(5) = 15b_0^5,$$
$$\alpha_1(6) = 29b_0^6,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1(k) = F_4(k+1)b_0^k,$$

где $F_4(k+1)$ – ряд чисел Квадробоначчи.

Определение 1. Ряд Квадробоначчи – это последовательность чисел, заданная рекурсией $F_4(k+1) = F_4(k) + F_4(k-1) + F_4(k-2) + F_4(k-3)$, где $F_4(0) = 0$, $F_4(1) = 1$, $F_4(2) = 1$, $F_4(3) = 2$, $F_4(4) = 4$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда

$$\alpha_1(k) = F_4(k+1)b_0^k,$$

где $F_4(k+1)$ – ряд чисел Квадробоначчи.

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией. Тогда

$$\alpha_1(k) = b_0\alpha_1(k-1) + b_0^2\alpha_1(k-2) + b_0^3\alpha_1(k-3) + b_0^4\alpha_1(k-4) =$$
$$= b_0\left(F_4(k)b_0^{k-1}\right) + b_0^2\left(F_4(k-1)b_0^{k-2}\right) + b_0^3\left(F_4(k-2)b_0^{k-3}\right) + b_0^4\left(F_4(k-3)b_0^{k-4}\right) =$$
$$= b_0^k\left(F_4(k) + F_4(k-1) + F_4(k-2) + F_4(k-3)\right) = F_4(k+1)b_0^k.$$

Лемма доказана.

Перейдем к описанию ряда весовых коэффициентов $\alpha_2(k)$ при x_{t-1}:

$$\alpha_2(1) = b_0,$$
$$\alpha_2(2) = 2b_0^2,$$
$$\alpha_2(3) = 4b_0^3,$$
$$\alpha_2(4) = 7b_0^4,$$
$$\alpha_2(5) = 14b_0^5,$$
$$\alpha_2(6) = 27b_0^6,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_2(k) = F_4'(k+1)b_0^{k+1},$$

где $F_4'(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Квадробоначчи, причем $F_4'(k+1) = F_4(k) - F_4(k-4)$.

Лемма 2. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда

$$\alpha_2(k) = F_4'(k+1)b_0^{k+1},$$

где $F_4'(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Квадробоначчи.

Доказательство. Пусть лемма верна, тогда

$$\alpha_2(k) = b_0\alpha_2(k-1) + b_0^2\alpha_2(k-2) + b_0^3\alpha_2(k-3) + b_0^4\alpha_2(k-4) =$$

$$= b_0\left(F_4'(k)b_0^k\right) + b_0^2\left(F_4'(k-1)b_0^{k-1}\right) + b_0^3\left(F_4'(k-2)b_0^{k-2}\right) + b_0^4\left(F_4'(k-3)b_0^{k-3}\right) =$$

$$= b_0^{k+1}\left(F_4'(k) + F_4'(k-1) + F_4'(k-2) + F_4'(k-3)\right) = F_4'(k+1)b_0^{k+1}.$$

Лемма доказана.

Далее рассмотрим ряд весовых коэффициентов $\alpha_3(k)$ при x_{t-2}:

$$\alpha_3(1) = b_0,$$
$$\alpha_3(2) = 2b_0^2,$$
$$\alpha_3(3) = 3b_0^3,$$
$$\alpha_3(4) = 6b_0^4,$$
$$\alpha_3(5) = 12b_0^5,$$
$$\alpha_3(6) = 23b_0^6,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_3(k) = F_4''(k+1)b_0^{k+2},$$

где $F_4''(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Квадробоначчи, причем $F_4''(k+1) = F_4'(k) - F_4(k-3) = F_4(k) - F_4(k-4) - F_4(k-3)$.

Лемма 3. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда

$$\alpha_3(k) = F_4''(k+1)b_0^{k+2},$$

где $F_4''(k+1)$ – модифицированный ряд чисел Квадробоначчи.

Доказательство. Пусть лемма верна, тогда

$$\alpha_3(k) = b_0\alpha_3(k-1) + b_0^2\alpha_3(k-2) + b_0^3\alpha_3(k-3) + b_0^4\alpha_3(k-4) =$$

$$= b_0\left(F_4''(k)b_0^{k+1}\right) + b_0^2\left(F_4''(k-1)b_0^{k}\right) + b_0^3\left(F_4''(k-2)b_0^{k-1}\right) + b_0^4\left(F_4''(k-3)b_0^{k-2}\right) =$$

$$= b_0^{k+2}\left(F_4''(k) + F_4''(k-1) + F_4''(k-2) + F_4''(k-3)\right) = F_4''(k+1)b_0^{k+2}.$$

Лемма доказана.

Последний ряд весовых коэффициентов $\alpha_4(k)$ при x_{t-3}:

$$\alpha_4(1) = b_0,$$
$$\alpha_4(2) = b_0^2,$$
$$\alpha_4(3) = 2b_0^3,$$
$$\alpha_4(4) = 4b_0^4,$$
$$\alpha_4(5) = 8b_0^5,$$
$$\alpha_4(6) = 15b_0^6,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_4(k) = F_4(k)b_0^{k+3},$$

где $F_4(k)$ – ряд чисел Квадробоначчи.

Лемма 4. Пусть $\sum_{i=0}^{\infty} b_0^i$ – нормированный знакоположительный степенной ряд, где $0 \le b_i < 1$. Тогда

$$\alpha_4(k) = F_4(k) b_0^{k+3},$$

где $F_4(k)$ – ряд чисел Квадробоначчи.

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией. Тогда

$$\alpha_4(k) = b_0 \alpha_4(k-1) + b_0^2 \alpha_4(k-2) + b_0^3 \alpha_4(k-3) + b_0^4 \alpha_4(k-4) =$$
$$= b_0\left(F_4(k-1) b_0^{k+2}\right) + b_0^2\left(F_4(k-2) b_0^{k+1}\right) + b_0^3\left(F_4(k-3) b_0^{k}\right) + b_0^4\left(F_4(k-4) b_0^{k-1}\right) =$$
$$= b_0^{k+3}\left(F_4(k-1) + F_4(k-2) + F_4(k-3) + F_4(k-4)\right) = F_4(k) b_0^{k+3}.$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего выделения свойств прогнозов необходимо ввести функцию, аналогичную функции Бине. Используем рекурсию Квадробоначчи (опр. 1) и построим производящую функцию

$$F_4(x) = F_4(0)x^0 + F_4(1)x^1 + F_4(2)x^2 + F_4(3)x^3 + \sum_{k=4}^{\infty}\left(F_4(k-4) + F_4(k-3) + F_4(k-2) + F_4(k-1)\right)x^k. \quad (2)$$

Домножим каждую строчку на *x* в соответствующей степени и произведем суммирование:

1. $\sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-4)x^k = x^4 \sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-4)x^{k-4} = |n = k-4| = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} F_4(n)x^n.$

2.

$$\sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-3)x^k = x^3 \sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-3)x^{k-3} = |n = k-3| = x^3 \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_4(n)x^n + 1x^0 - 1x^1\right) = x^3\left(F_4(x) - 1\right).$$

3.

$$\sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-2)x^k = x^2 \sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-2)x^{k-2} = |n = k-2| =$$
$$= x^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left(F_4(n)x^n + 1x^0 - 1x^1 - 1 - x\right) = x^2\left(F_4(x) - 1 - x\right).$$

4.

$$\sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-1)x^k = x \sum_{k=4}^{\infty} F_4(k-1)x^{k-1} = |n = k-1| =$$
$$= x \sum_{n=1}^{\infty}\left(F_4(n)x^n + 1x^0 + 2x^2 - 1x^1 - 1 - x - 2x^2\right) = x^2\left(F_4(x) - 1 - x - 2x^2\right).$$

Внесем полученные значения в производящую функцию (2), получим

$$F_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + x^4 F_4(x) + x^3\left(F_4(x) - 1\right) + x^2\left(F_4(x) - 1 - x\right) + x^2\left(F_4(x) - 1 - x - 2x^2\right)$$

или

$$F_4(x) - x^4 F_4(x) - x^3 F_4(x) - x^2 F_4(x) - x F_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 - x^3 - x^2 - x^3 - x - x^2 - 3x^3.$$

Откуда

$$F_4(x) = \frac{1}{1 - x^4 - x^3 - x^2 - x} = \frac{A}{x - \varphi_1} + \frac{B}{x - \varphi_2} + \frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c}, \quad (3)$$

где $1 - x^4 - x^3 - x^2 - x = -(x - \varphi_1)(x - \varphi_2)(ax^2 + bx + c)$.

Следующим этапом необходимо решить уравнение $1 - x^4 - x^3 - x^2 - x = 0$. К сожалению, решить данное уравнение пока не получилось (вычислительные системы также не дают решения, ссылаясь на громоздкость получаемых решений), но выделены основные этапы:

1. По формулам Феррари найти решение одного из корней, которое будет действительно содержащим радикал четвертой степени. Затем полученное уравнение сокращается путем деления уравнения на данный корень.

2. Решение уравнения 3-го порядка требует использования формулы Кардана, тем самым будут найден еще один вещественный корень.

3. Последующие решения уравнения дадут два комплексных корня.

4. Используя, полученные корни решаем уравнение относительно (3).

Выводы. Теория применения авторегрессионных моделей при анализе социально-экономических, технических и производственных процессов довольно обширна и многогранна, но в то же время имеет большое количество ограничений (таких как ограничения для использования МНК, МНП и др.). Помимо этого не до конца изучен весь спектр направлений использования данных методов и моделей, а также возможные области применения и ограничения целесообразности этого применения. Так, например, в работах [3–5] рассмотрен метод подбора параметров в моделях авторегрессии на основе числовых рядов, который отчасти решает проблему ограничения классических методов, также введены зависимости авторегрессионных процессов и классических понятий математики, таких как "золотое сечение", "треугольник Паскаля", что ранее было не так очевидно.

Используя методологию данного метода, были оценены более детально указанные выше понятия, а также основы теории авторегрессионных процессов.

Согласно результатам, полученным в данной работе, можно утверждать, что был выявлен спектр свойств модели авторегрессии с методом подбора параметров на основе числовых рядов, позволяющий расширить область применения при анализе процессов.

Литература

1. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1998. – 1022 с.
2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1.
3. *Городов А.А.* Моделирование временных рядов на основе нормированных числовых рядов // СУИТ. – 2010. – Вып. 22.
4. *Городов* А.А., Кузнецов А.А. Свойства прогнозов в моделях авторегрессии по методу числовых рядов // СУИТ. – 2011. – Вып. 3(45).
5. *Городов А.А., Кузнецов А.А., Демьяненко О.В.* Золотое сечение и прогнозирование по авторегрессии // Вестник КрасГАУ. – 2012. – № 2.