

УДК 338.351

Л.В. Калягина, П.Е. Разумов

## ФРАКТАЛЬНОСТЬ РОССИЙСКОГО РЫНКА

*В статье рассматриваются вопросы фрактальности российского рынка. По мнению авторов, после кризиса на российском фондовом рынке ситуация стала предсказуема на меньших диапазонах времени.*

**Ключевые слова:** фрактальность, российский рынок, инвесторы, закон распределения.

*L.V. Kalyagina, P.E. Razumov*

## FRACTALITY OF THE RUSSIAN MARKET

*In article questions of fractality of the Russian market are considered. According to authors, after crisis in the Russian stock market the situation became predictable on smaller ranges of time.*

**Key words:** fractality, russian market, investors, law of distribution.



В ряде научных работ [1–4] обосновываются причины малой информативности статистических показателей как следствие наличия фрактальных свойств во временном поведении эмпирических данных, функция распределения которых не соотносится с нормальным законом распределения. Таким образом, с целью выявления оценок динамики рассматриваемых развивающихся процессов, отражаемых такими характеристиками, как наличие или отсутствие трендоустойчивости, отсутствие или наличие долговременной памяти, а вместе с ней и наличие разномасштабных квазициклов, предлагаются различные подходы. Для обработки нестационарных сигналов разработаны так называемые вэйвлет, кратномасштабный сегментный анализ, а также в этих случаях часто используются теория хаоса и фрактальная геометрия [5].

Теория хаоса и фрактальная геометрия представляют любую сложную систему, способную адаптироваться к изменениям в окружающей среде в процессе своей эволюции во времени. Такие процессы отличаются долговременной устойчивостью. Однако условиями этой устойчивости является неопределенность в кратковременной перспективе. Теория хаоса объясняет резкие скачкообразные изменения в развитии системы и дает результаты весьма убедительные, которые позволяют с уверенно-

стью сказать, что обоснованные предсказания здесь не только возможны, но и являются мощным фактором управления изучаемыми процессами.

Наиболее часто во фрактальной геометрии применяется способ классификации фрактальных временных рядов, который был предложен Мандельбротом. Метод базируется на исследованиях, проведенных Херстом, и носит название R/S-метода. Он построен на анализе размаха параметра (наибольшим и наименьшим значением на изучаемом отрезке) и среднеквадратичного отклонения. В частности, Херст предложил новую статистику – показатель Херста  $H$  [6]. Этот показатель имеет широкое применение в анализе временных рядов, благодаря своей замечательной устойчивости. Он содержит минимальные предположения об изучаемой системе и может классифицировать временные ряды. Он может также отличить случайный ряд от неслучайного, даже если случайный ряд негауссовский (то есть ненормально распределенный).

Для калибровки временных измерений Херст ввел безразмерное отношение посредством деления размаха на стандартное отклонение наблюдений. Этот способ анализа стал называться методом нормированного размаха (R/S-анализ). Херст показал, что большинство естественных явлений, включая речные стоки, температуры, осадки, солнечные пятна следуют «смещенному случайному блужданию» – тренду с шумом. Сила тренда и уровень шума могут быть оценены тем, как изменяется нормированный размах со временем.

Метод Херста применим и для изучения временных рядов в экономике и на рынках капитала, он позволяет выяснить, являются ли эти ряды также смещенными случайными блужданиями.

Прежде всего, необходимо определить размах:

$$R = \max(x_{t,N}) - \min(x_{t,N}), \quad (1)$$

где  $R$  – размах отклонения  $x_{t,N}$ ;  $\max(x_{t,N})$  – максимальное значение для  $x_{t,N}$ ;  $\min(x_{t,N})$  – минимальное значения для  $x_{t,N}$ .

Для сравнения различных типов временных рядов Херст разделил этот размах на стандартное отклонение исходных наблюдений. Этот «нормированный размах» должен увеличиваться со временем. Херст ввел следующее соотношение:

$$R/S = (a \cdot N)^H, \quad (2)$$

где  $R/S$  – нормированный размах;  $N$  – число наблюдений;  $a$  – константа;  $H$  – показатель Херста.

В соответствии со статистической механикой показатель  $H$  должен был равняться 0,5, если ряд представляет собой случайное блуждание. Другими словами, размах накопленных отклонений должен увеличиваться пропорционально квадратному корню из времени  $N$ . Когда  $H$  отличается от 0,5, то это значит, что наблюдения не являются независимыми. Каждое наблюдение несет память о всех предшествующих событиях. Это не кратковременная память, которую часто называют «марковской», а это другая память – долговременная, теоретически она сохраняется навсегда. Недавние события имеют влияние большее, чем события отдаленные, но остаточное влияние этих последних всегда ощутимо. В долговременном масштабе система, которая дает статистику Херста, есть результат длинного потока взаимосвязанных событий. То, что случается сегодня, влияет на будущее. То, где находится система теперь, определяется тем, где она была в прошлом. Время оказывается важным фактором. Сила этого стремления постепенно ослабевает до тех пор, пока все его цели и намерения не сведутся к нулю.

Включение «стрелы времени» невозможно в стандартной обработке данных, которая предполагает ряды инвариантными по отношению ко времени. В противоположность этому находим, что время – итеративный процесс. Влияние настоящего на будущее может быть выражено корреляционным соотношением [7].

$$C = 2^{2H-1} - 1, \quad (3)$$

где  $C$  – мера корреляции;  $H$  – показатель Херста.

Имеются три различных классификации для показателя Херста:

1)  $H = 0,5$ . Никакой выраженной тенденции процесса не выявлено и нет оснований считать, что она появится в будущем, что указывает на случайный ряд. События случайны и некоррелированы,  $C = 0$ . Настоящее не влияет на будущее. Функция плотности вероятности может быть нормальной кривой, однако это необязательное условие. R/S-анализ может классифицировать произвольный ряд безотносительно к тому, какой вид распределения ему соответствует;

2)  $0 \leq H < 0,5$ . Данный диапазон соответствует антиперсистентным, или эргодическим, рядам. Такой тип системы часто называют «возврат к среднему». Если система демонстрирует рост в предыдущий период, то, скорее всего, в следующем периоде начнется спад. И, наоборот, если шло снижение, то вероятен близкий подъем. Устойчивость такого антиперсистентного поведения зависит от того, насколько  $H$  близко к нулю. Чем ближе его значение к нулю, тем ближе  $C$  к -0,5, или отрицательной корреляции. Такой ряд более изменчив, или волатилен, чем ряд случайный,

так как состоит из частых реверсов спад-подъем. Несмотря на широкое распространение концепции возврата к среднему, в экономической и финансовой литературе до сих пор было найдено мало антиперсистентных рядов;

3)  $0,5 < H < 1,0$ . Имеем персистентные, или трендоустойчивые, ряды. Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то вероятно, что он будет сохранять эту тенденцию какое-то время в будущем. Тренды очевидны. Трендоустойчивость поведения, или сила персистентности, увеличивается при приближении  $H$  к 1, или 100 % корреляции ( $C = 1$ ). Чем ближе  $H$  к 0,5, тем более зашумлен ряд и тем менее выражен его тренд. Персистентный ряд – это обобщенное броуновское движение, или смещенные случайные блуждания. Сила этого смещения зависит от того, насколько  $H$  больше 0,5.

Персистентные временные ряды являют собой более интересный класс, так как оказалось, что они не только в изобилии обнаруживаются в природе (это открытие принадлежит Херсту), но и свойственны рынкам капитала.

Херст предложил также формулу для оценки величины  $H$  по значению  $R/S$ :

$$H = \log(R/S)/\log(n/2), \quad (4)$$

где  $n$  – количество наблюдений.

Проведем анализ распределения прибыли российского фондового рынка, используя дневной индекс «Российской Торговой Системы» (RTS) за период с сентября 1995 по май 2013 г. [8]. При анализе рынка будем использовать логарифмические прибыли, определенные первой разностью логарифмов значений индекса RTS ( $\Delta rts$ ). Для  $R/S$ -анализа логарифмические прибыли более подходящие, чем широко используемые процентные изменения значений индекса. Размах, используемый в  $R/S$ -анализе, есть накопленное отклонение от среднего, а логарифмические прибыли складываются в накопленную прибыль, чего нельзя сказать о процентных изменениях.

Проведем исследование на диапазоне приращения ряда дневных значений индекса RTS. Анализ будет проводиться по двум периодам:

1) ряд значений индекса RTS, зафиксированных на протяжении 10 лет, которые преобразованы в 2175 дневных логарифмических прибылей, или 104 месячных логарифмических прибылей;

2) ряд значений индекса RTS, зафиксированных с 5 мая 1999 по 17 мая 2013 г., то есть период развития российского фондового рынка после кризиса, которые преобразованы в 1259 дневных логарифмических прибылей, или 60 месячных логарифмических прибылей.

Оценивать показатель Херста (H) для полного диапазона данных неправильно ввиду того, что ряд имеет конечную память и начинает следовать случайным блужданиям. Теоретически процесс с долговременной памятью предполагается берущим начало из бесконечно удаленного прошлого. Но в теории хаоса утверждается, что в любой нелинейной системе, в ее движении всегда существует точка, где теряется память о начальных условиях. Эта точка «потери» аналогична концу естественного периода системы. Исходя из этого, предполагается, что процессы с долговременной памятью в большинстве систем не бесконечны – они имеют предел [9]. Сколь долга эта память – это зависит от структуры нелинейной динамической системы, которая порождает временной ряд. Из анализа полученных оценок H можно делать вывод о процессе с долговременной памятью.

Начнем с применения R/S-анализа к дневным данным индекса RTS за 10-летний период с 1 сентября 1995 по 17 мая 2013 г.

По регрессии внутри среднего цикла было получено  $H = 0,782 \pm 0,0614$ , а по всей выборке оценка  $H = 0,487 \pm 0,0606$ , что соответствует случайному блужданию, то есть наблюдения становятся независимыми (случайными) и эффект памяти рассеивается. Это подтверждает, что средняя длина цикла, или период для дневных прибылей российского фондового рынка по индексу RTS, равняется 211 торговым дням, или 10 календарным месяцам. Это именно средняя величина, поскольку система неперiodична и фрактальна.

На рис. 1 представлены величины H, рассчитанные по регрессиям, включающим все предыдущие значения прибыли до расчетного момента.

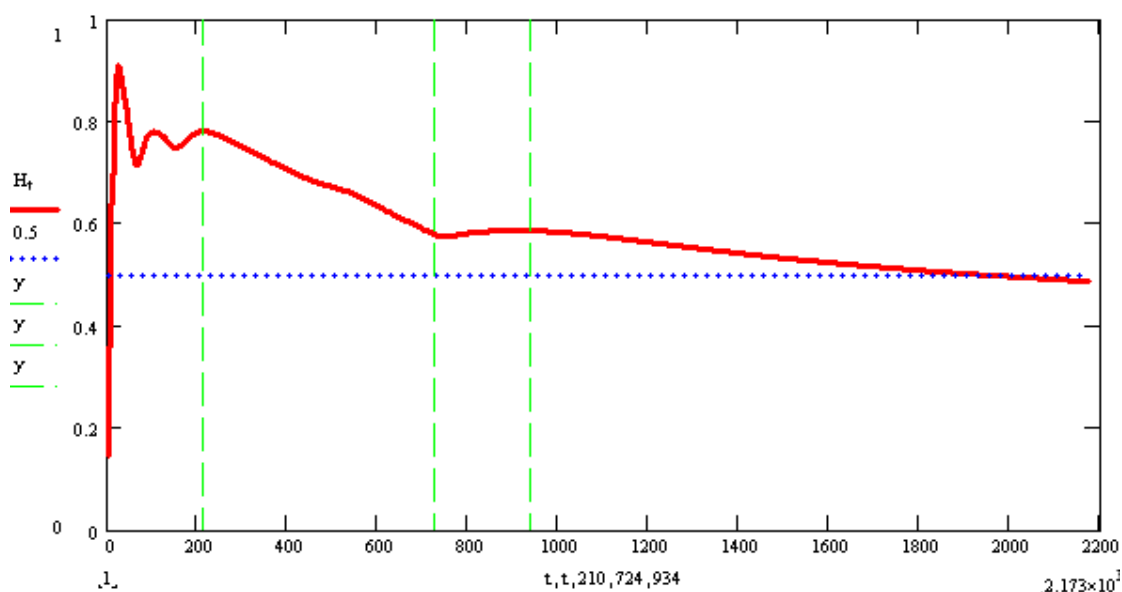


Рис. 1. R/S-анализ: оценка длины цикла дневных прибылей по индексу RTS с сентября 1995 по май 2013 г.

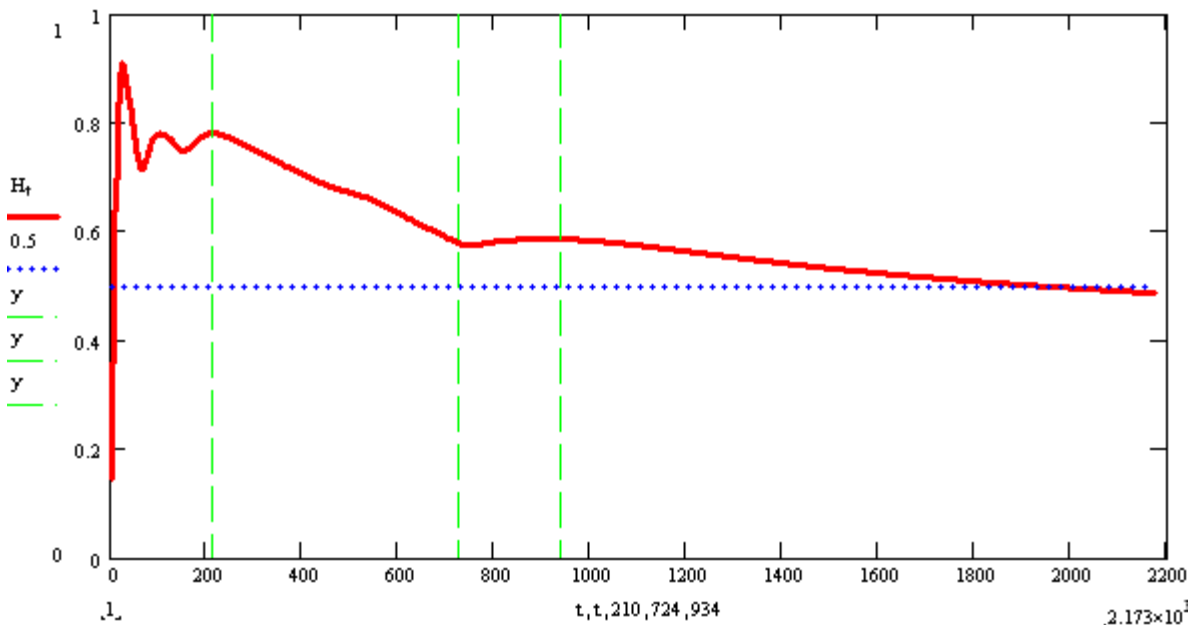


Рис. 1. Окончание

Пик явно наблюдается при значении 211 торговых дней, или 10 календарных месяцев с  $H = 0,782$ , потому что только после данного значения система монотонно убывает, стремясь к значению  $H = 0,5$ . Это оценка показателя Херста для дневных прибылей по индексу RTS, которая обозначена на рис. 2 первой вертикальной линией. Две последующие вертикальные линии (от  $t = 724$  (31 июля 1998 г.) до  $t = 934$  (3 июня 1999 г.)) показывают отчетливо выделяющийся временной интервал, где происходит смена тенденции поведения оценки показателя Херста. Она начинает возрастать, и данная тенденция продолжается в течение средней длины цикла (211 торговых дней), после чего система снова начинает монотонно убывать, стремясь к значению  $H = 0,5$ . Данный интервал соответствует российскому кризису 1998 г.

Таким образом, в результате проведенного исследования были получены следующие результаты:

1) российский фондовый рынок имеет среднюю длину цикла 10 календарных месяцев, то есть в течение данного срока система имеет связь с начальными данными – присутствует долгосрочная память. Примечательно, что одинаковая длина цикла была установлена при анализе на двух различных диапазонах приращения. Это свидетельствует об однородности длины цикла. Потеря памяти системой происходит в среднем каждые 10 мес.

Следовательно, дело не в том, какое количество наблюдений имеется, а в том, сколько периодов охватывают эти данные. Это значительно отличается от стандартного статистического анализа, где более важно количество наблюдений, нежели длина исследуемого временного ряда.

Независимость длины цикла от разрешения данных имеет большое значение для количественного анализа. Это означает, что долгосрочная зависимость может и должна измеряться с использованием месячных данных. Данное утверждение выдерживает критику о появлении смещения при использовании малых выборок или коротких временных рядов, так как фрактальное распределение аддитивно. Каждый временной интервал имеет достаточное количество заключенных в течение него сделок. Поэтому для анализа фрактальных временных рядов требуется не большое количество наблюдений, а длинный временной ряд;

2) оценка показателя Херста для прибылей российского фондового рынка определяется как  $H=0,782$  для дневных данных. Однако увеличение  $H$  при переходе на более длительные смещения может происходить на практике. Это означает, что в системе имеется незначительный шум для периодов короче данного смещения.

Более низкая величина  $H$  может наблюдаться в тех случаях, когда имеется случайный шум в данных или явление «возвратных значений». Из этого следует, что движение в дневных ценах акций больше подвержено возвратам, чем это свойственно им в более длинных временных периодах. Также объяснение может состоять в том, что ценовые изменения в коротких временных периодах не независимы, как это утверждает фрактальная модель, но, напротив, содержат некоторые марковские кратковременные зависимости.

Другими словами, большие изменения в системе следуют своим законам, малые – своим. Отдельные изменения, например цены, не являются независимыми, но содержат марковские кратковременные зависимости. Редкие резкие изменения должны порождаться переменами периода колебаний. Периоды без резких изменений должны быть мягче. Такой процесс может дать значение  $H$  ниже, чем процесс без марковских зависимостей, так как последние, будучи кратковременными, становятся слабее с увеличением временного приращения и при этом можно ожидать увеличения и стабилизации  $H$ .

Для российского рынка в течение месяца марковский процесс диссипирует, в результате чего  $H$  становится устойчивой величиной, равной 0,8. Эта марковская зависимость не должна смешиваться с долгосрочной зависимостью. Зависимость Херста означает, что сегодняшние события всегда продолжают влиять на будущее и это влияние никогда не может быть устранено. Марковские зависимости быстро распадаются, обращаясь в шум;

3) изменение тенденции поведения оценки показателя  $H$  на рис. 1 на интервале, соответствующем российскому кризису 1998 г., может свидетельствовать о том, что на российском фондовом рынке произошли системные изменения, то есть изменились фундаментальные показатели: длина цикла и показатель Херста.

Проверку данной гипотезы осуществим, проведя R/S-анализ ряда значений индекса RTS, зафиксированных с 5 мая 1999 по 17 мая 2013 г. – второй из рассматриваемых в данной работе периодов, соответствующий российскому фондовому рынку после кризиса 1998 г. Применим R/S-анализа к месячным данным индекса RTS за период после российского кризиса 1998 г.

По регрессии внутри среднего цикла получено значение  $H = 0,812 \pm 0,093$ . По всей выборке оценка  $H = 0,473 \pm 0,04$ , что соответствует случайному блужданию, то есть наблюдения становятся независимыми (случайными), и эффект памяти рассеивается. Это доказывает, что средняя длина цикла, или период для месячных прибылей российского фондового рынка по индексу RTS после кризиса 1998 г., равняется 4 календарным месяцам.

На рис. 2 представлены величины  $H$ , рассчитанные по регрессиям, включающим все предыдущие значения прибыли до расчетного момента.

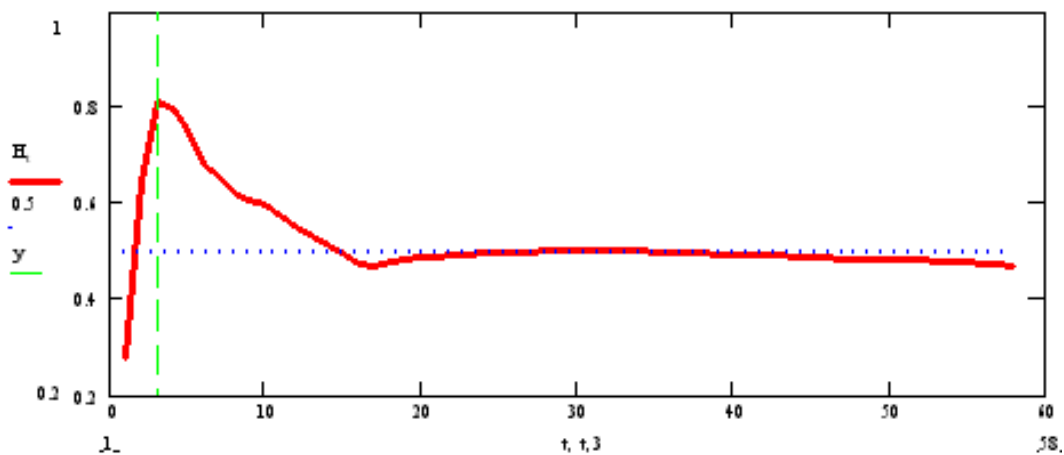


Рис. 2. R/S-анализ: оценка длины цикла месячных прибылей по индексу RTS с мая 1999 по май 2013 г.

Пик наблюдается при значении 4 календарных месяцев с  $H = 0,812$ . Это оценка показателя Херста для месячных прибылей по индексу RTS, которая обозначена на рис. 2 вертикальной линией.

Таким образом, получены следующие результаты:

1) для российского фондового рынка на интервале после кризиса 1998 г. была получена оценка показателя Херста ( $H$ ), равная 0,81, что незначительно выше оценки, полученной на интервале всей истории существования современного российского фондового рынка, равной 0,8. Но необходимо отметить, что для второй оценки стандартная ошибка регрессии больше на 3,4.

Таким образом, можно констатировать, что, так как  $H$  измеряет степень зазубренности временного ряда (чем меньше  $H$ , тем больше шума в системе и тем более ряд подобен случайному), то он выступает в том



числе и как показатель риска в пределах изменения цен, то оценка риска для российского фондового рынка не была изменена кризисом;

2) после кризиса 1998 г. произошло значительное уменьшение длины среднего цикла на российском фондовом рынке: с 10 календарных месяцев за всю историю существования до 4 календарных месяцев для интервала после кризиса.

Это свидетельствует о том, что игроки на рынке преимущественно пересмотрели свои инвесторские горизонты, а именно стали преобладать инвесторы с краткосрочными инвестиционными горизонтами, а стратегические инвесторы ушли с рынка. Это следствие того, что после кризиса на российском фондовом рынке ситуация стала предсказуема на меньших диапазонах времени.

### Литература

1. Назаров А.В., Лоскутов А.И. Нейросетевые алгоритмы прогнозирования и оптимизации систем. – СПб.: Наука и техника, 2003. – 384 с.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
3. Hurst H.E. Long-Term Storage of Reservoirs// Transactions of the American Society of Givil Engineers. – 1991. – 88 p.
4. Перепелица В.А., Попова Е.В. Математическое моделирование экономических процессов и социально-экологических рисков. – Ростов-н/Д., 2001. – 128 с.
5. Mandelbrot B.B., Wallis J.R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resources Research. – 1969. – Vol. 5. – P. 321–340.
6. Hurst H.E. Long-term Storage of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1951. – P. 116.
7. Pancham S. Evidence of the Multifractal Market Hypothesis Using Wavelet Transform. FloridaInternationalUniversiti. – 1994. – P. 114–118.
8. Российская торговая система [Электронный ресурс] // www.rts.ru.
9. Вильямс Б. Торговый хаос. – М.: Аналитика, 2009.

